فصل‌نامه‌ی مطالعات اقتصاد انرژی/ سال دهم / شماره‌ی ۴۲/ پاییز ۱۳۹۳/ صفحات ۵۳ - ۲۵

بررسی رابطه‌ی بلندمدت میان قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی در قالب معادلات دیفرانسیل تصادفی

محسن ابراهیمی
دانشیار دانشکده‌ی اقتصاد و علوم اجتماعی دانشگاه بوعلی سینا همدان ebrahimimo@yahoo. com

عزت‌الله عباسیان
دانشیار دانشکده‌ی اقتصاد و علوم اجتماعی دانشگاه بو علی سینا همدان abbasian@basu.ac.ir

محمد مزرعتی
دانشیار مؤسسه‌ی مطالعات انرژی mo_mazraati@yahoo.com

عظیم نظری[۱]
عضو هیأت علمی دانشگاه دولتی بجنورد و فارغ التحصیل بوعلی سینا همدان
az.nazari61@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۲/۰۴/۲۲ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۱/۱۴

چکیده

مطالعات زیادی در مورد مدل‌سازی قیمت نفت و گاز طبیعی در قالب معادلات دیفرانسیل تصادفی (مدل قیمت‌گذاری مشتقات) انجام شده است. بیش‌تر این مطالعات به بررسی رابطه‌ی کوتاه‌مدت در قالب مدل قیمت‌گذاری کالا پرداخته‌اند، ولی به رابطه‌ی بلندمدت قیمت نفت و گاز طبیعی توجهی نکرده‌اند، بنابراین در این مطالعه سعی بر این است که برای نفت و گاز طبیعی در قالب مدل‌های قیمت‌گذاری چند کالایی (معادلات دیفرانسیل تصادفی)، روابط بلندمدت میان کالاها به مدل مورد نظر اضافه شود. وجود روابط بلندمدت میان کالاهای مورد نظر سبب انحراف قیمت نقدی از سطح بلندمدتش می‌شود، بنابراین در مدل بسط‌یافته دو عامل برای انحراف از سطح بلندمدت وجود دارد. یکی از این عوامل بازدهی آسایش و عامل دیگر وجود رابطه‌ی بلندمدت (خطای بلندمدت) میان قیمت نقدی کالاها می‌باشد.

سپس با استفاده از داده‌های ماهانه‌ی قیمت آتی بازار بورس نیویورک (NYMEX) برای چهار قرارداد (با سررسیدهای ۱، ۳، ۵ و ۹ ماهه) نفت و گاز طبیعی در بازه‌ی زمانی ۲۰۱۱-۱۹۹۴ و فیلتر کالمن به بررسی کارایی مدل بسط‌یافته برای نفت‌خام و گاز طبیعی پرداخته شده و وجود روابط بلندمدت را می‌شود. نتایج حاصل از این مطالعه نشان می‌دهد که میان دو کالا روابط بلندمدت وجود دارد و بایستی در مدل‌سازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی (برای قیمت‌گذاری مشتقات انرژی مانند اختیارات) وجود هم حرکتی یا رابطه‌ی بلندمدت در نظر گرفته شود.

طبقه‌بندی **JEL**: Q4, Co1, Co2, C51, C88, G12, G13

کلید واژه: قیمت نقدی، قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی، قیمت‌گذاری اختیارات، بازدهی آسایش، فیلتر کالمن

۱- نویسنده مسئول

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر قیمت‌های نفت (نقدی و آتی) مرتبا در ادبیات اقتصادی بررسی و دنبال شده‌اند این مسئله به دلیل اهمیت نفت بر اقتصاد کلان جهان است. امروزه نفت بزرگ‌ترین بازار کالا در جهان است و بخش بزرگی از مبادلات را تشکیل می‌دهد و جذابیت سرمایه‌گذاری در بازار انرژی و مدیریت ریسک افزایش یافته است. یکی از کالاهای انرژی نفت‌خام است که دارای مشخصه‌ی قیمت پرنوسان می‌باشد، بنابراین نوسانات قیمت نفت و همبستگی آن با سایر انرژی‌ها از اهمیت بالایی برای تولیدکنندگان، مصرف‌کنندگان و بورس‌بازان برخوردار است. این مسئله برای ایران به دلیل برخورداری از منابع بزرگ نفتی و تأثیر آن بر بودجه از اهمیت بالاتری برخوردار است. از سوی دیگر با راه‌اندازی بورس انرژی در ایران، شناخت مدل‌های قیمت‌گذاری برای قیمت‌گذاری قراردادهای آتی، مدل‌سازی قیمت نقدی، پیش‌بینی آن و... مورد نیاز است. بنابراین در این مطالعه رفتار قیمت نفت براساس مدل قیمت‌گذاری کالا در قالب معادلات دیفرانسیل تصادفی بررسی می‌شود. برای این امر در ابتدا توسعه‌ی مدل‌های قیمت‌گذاری کالا بررسی می‌شود.

مدل‌های قیمت‌گذاری کالا از چندین بعد توسعه یافته هستند و در حال توسعه هستند. اولین توسعه در خصوص تعداد عامل‌های ریسکی موجود در مدل است. در این مرحله از توسعه مدل‌های تک عاملی به مدل‌های دو عاملی، سه عاملی و چهار عاملی توسعه می‌یابند. در حقیقت وجود چندین عامل ریسکی سبب می‌شود که انعطاف‌پذیری مدل و سازگاری با واقعیات افزایش یابد. این مدل‌ها در کارهای مطالعاتی برنیان و شوارتز[1] (۱۹۸۵)، کورتازار و نارنجو[2] (۲۰۰۶)، کورتازار و شوارتز (۱۹۹۷) و گیسبون و شوارتز[3] (۱۹۹۰) و... مشاهده می‌شوند. جنبه‌ی دوم توسعه در نحوه‌ی مدل کردن عرض از مبدا و عامل‌ها می‌باشد. مدل‌های اولیه‌ی قیمت‌گذاری کالا فقط شامل یک حرکت برآونی ساده می‌باشند، در حالی که مدل‌های پیشرفته شامل نوسانات فصلی، تغییرپذیری حق پرداختی ریسک و برگشت‌پذیری به میانگین را شامل می‌شوند. در این مورد می‌توان به کارهای مطالعاتی کاساسوس و کولین-دوفرنسی[4] (۲۰۰۵)، دای و

1- Brennan and Schwartz
2- Cortazar and Naranjo
3- Gibson and Schwartz
4- Casassus and Collin-Dufresne

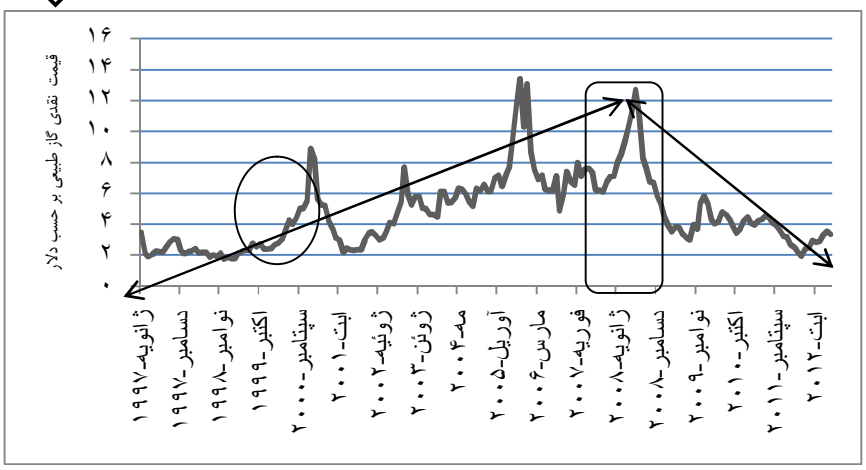
سینگلتون[1] (۲۰۰۰)،... اشاره کرد. بعد سوم توسعه در مورد فرآیندهای تخمین، شامل کالیبره کردن مدل مقطعی زمان، فیلترهای سنتی کالمن با داده‌های پانل کامل و فرایندهای فیلتر کالمن توسعه یافته و غیره می‌باشد. در این مورد می‌توان به مطالعات کورتازار و نارنجو (۲۰۰۶)، کورتازار و شوارتز[2] (۲۰۰۳)، سورنیسین (۲۰۰۲) اشاره کرد. بعد چهارم توسعه در مورد مدل‌هایی است که در شکل نوسانات (واریانس) با یکدیگر فرق می‌کنند، مدل‌های اولیه بیش‌تر یک نوسان ثابت در نظر می‌گرفتند، اما در مطالعات بعدی نوسانات به صورت تصادفی در بعضی از مدل‌ها مانند هیستون[3] و مدل SABR ارائه شده توسط هیگن و همکاران[4] (۲۰۰۲) و یا به صورت مدل‌های ARCH[5]، GARCH[6] یا این‌که به صورت مدل نوسانات تصادفی توسعه نیافته[7] ظاهر شدند. در حقیقت جنبه‌ی پنجم توسعه در مورد تعداد کالاهای موجود در معادلات دیفرانسیل تصادفی است. مدل‌های اولیه رفتار دینامیکی یک کالا را بررسی می‌کنند، با این توسعه مدل‌ها تک-کالایی به چند-کالایی تبدیل می‌شوند، زیرا کالاهایی وجود دارند که ممکن است بازدهی‌های آن‌ها همبستگی داشته باشند، بنابراین تغییرات قیمت در قراردادهای آتی یک کالا می‌تواند شامل اطلاعات مفیدی برای سایر کالاها باشد. برای مثال زمانی که بازدهی یک کالا مانند گاز طبیعی در سبد دارایی افزایش یابد سبب تأثیر بر بازدهی نفت و وضعیت نفت در سبد دارایی سرمایه‌گذار می‌شود بنابراین نیاز است اثرات قیمتی گاز طبیعی بر نفت در مدل سازی قیمت نفت در نظر گرفته شود. بنابر ادبیات اقتصادی، رابطه‌ی بلندمدت اقتصادی[8] به دلایلی از قبیل رابطه‌ی تولیدی بین کالاها، رابطه‌ی جانشینی و رابطه‌ی مکملی می‌تواند به وجود آید، بنابراین در صورت وجود چنین روابطی بین دو یا چند کالا، میان قیمت آن‌ها هم حرکتی[9] ایجاد می‌شود و باید در مدل‌های قیمت‌گذاری کالاها با استفاده از ادعاهای تصادفی[10] ملاحظه شود. زمانی که از یک کالا در فرایند تولید کالای دیگر استفاده می‌شود بین آن‌ها رابطه‌ی تولیدی به‌وجود می‌آید. برای مثال برای تولید برق از گاز طبیعی استفاده می‌شود، بنابراین بر اثر این

1- Dai and Singleton
2- Cortazar and Schwartz
3- Heston
4- Hagan and et al.
5- Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
6- Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
7- Un-spanned
۸- وجود رابطه‌ی بلند مدت را می‌توان به عنوان بعد ششم توسعه در نظر گرفت که به این مدل اضافه شده است.
9- Co-movement
10- Contingent Claims

رابطه‌ی تولیدی بین آن‌ها ممکن است بین دو قیمت گاز طبیعی و برق یک رابطه‌ی بلندمدت و در نتیجه هم حرکتی شکل بگیرد. چون این دو کالا در بازارهای بورس انرژی در قالب مشتقاتی از قبیل قراردادهای آتی معامله می‌شوند. از سوی دیگر رابطه‌ی جانشینی زمانی به وجود می‌آید که کالاهای مبادله شده در مصرف جانشین یکدیگر باشند. در این مورد می‌توان نفت‌خام و گاز طبیعی را مثال زد که برای تولید برق استفاده می‌شوند، بنابراین به عنوان رقیب در تولید برق به‌کار می‌روند، بنابراین تغییر قیمت در قراردادهای آتی یک کالا روی قراردادهای آتی کالای دیگر تأثیر دارد. از مقایسه‌ی دو نمودار زیر مشاهده می‌شود که میان قیمت نقدی گاز طبیعی و نفت هم حرکتی وجود دارد، بنابراین باید هم حرکتی (رابطه‌ی بلندمدت) میان قیمت گاز طبیعی و نفت در مدل‌های قیمت‌گذاری کالا وارد شود. در مدل‌های قبلی فقط اثر کوتاه‌مدت[1] قیمت گاز طبیعی روی نفت بررسی شده است.

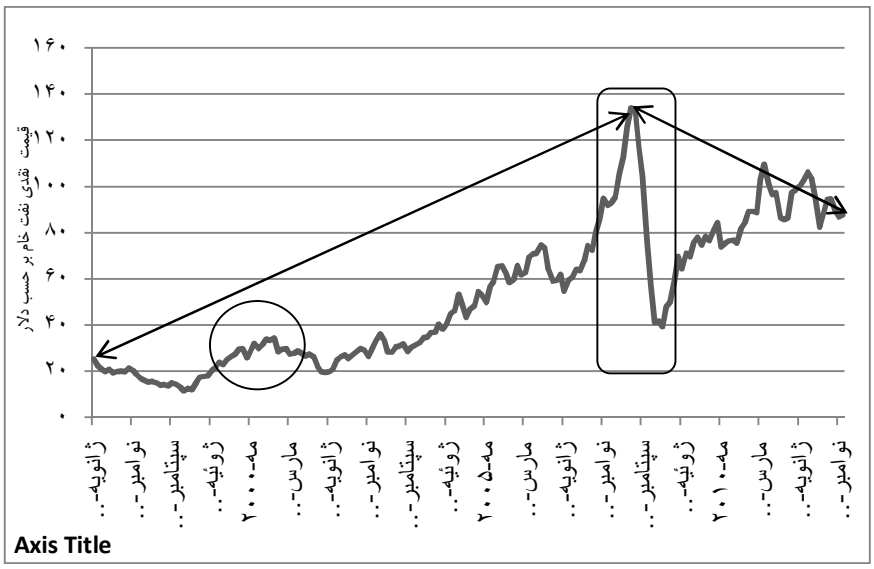
هدف این مطالعه مدل‌سازی قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی با در نظر گرفتن رابطه‌ی بلندمدت آن‌ها می‌باشد. بنابراین ابتدا نحوه‌ی مدل سازی عرض از مبدا و عوامل ایجاد کننده‌ی انحراف از میانگین بلندمدت در عرض از مبدا بررسی می‌شود. دوم این‌که برای بررسی رفتار قیمت نقدی نفت و گاز و اثرات آن‌ها بر یکدیگر از مدل چند کالایی استفاده می‌شود. یکی از عوامل انحراف از عرض از مبدا یا سطح بلندمدت بازدهی‌آسایش است. مدل سازی قیمت مشتقات در بازار کالا از مدل‌سازی قیمت مشتقات در بازارهای مالی، منتج می‌شود، اما چند تفاوت اساسی میان کالا و دارائی‌های مالی وجود دارد که سبب می‌شود مدل‌سازی قیمت کالا از قیمت دارائی متفاوت باشد. مهم‌ترین تفاوت در قابلیت ذخیره‌سازی کالاهاست. قابلیت ذخیره‌سازی کالا برای دارنده آن یک سری منافع ایجاد می‌کند که در خریدها آتی آن ایجاد نمی‌شود این منافع بر حسب نرخ، با عنوان بازدهی آسایش مطرح می‌شود، بنابراین وجود بازدهی آسایش سبب می‌شود که یکسری انحرافات از سطح بلندمدت قیمت نقدی به وجود آید.

۱- منظور ضریب همبستگی میان جزء وینر در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی قیمت اسپات گاز طبیعی و نفت است.



منبع: www.eia.Gov

نمودار ۱- قیمت نقدی گاز طبیعی



منبع: www.eia.gov

نمودار ۲ - قیمت نقدی نفت‌خام

از آن‌جا که رفتار قیمتی دو کالای نفت و گاز طبیعی بررسی می‌شود، بنابراین حداقل دو عامل تصادفی (قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی) وجود دارد. حال اگر بازدهی آسایش مقدار ثابت باشد، دو عامل تصادفی وجود دارد. اما چون مطلوبیتی که

مصرف‌کننده در زمستان از مصرف گاز طبیعی به دست می‌آورد با مطلوبیت حاصل در تابستان یا سایر فصول متفاوت است، بنابراین باید بازدهی آسایش به صورت تصادفی در معادلات دیفرانسیل تصادفی قیمت‌گذاری کالا وارد شود. در این صورت چهار عامل تصادفی وجود دارد و فرض می‌شود که رفتار تمامی این عامل‌های تصادفی به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی است و در هر یک از این معادلات تصادفی، جزء تصادفی از حرکت تصادفی وینر پیروی می‌کند، بنابراین چهار جزء حرکت تصادفی وینر وجود دارد و فرض می‌شود دو به دو با یکدیگر دارای همبستگی باشند. ضریب همبستگی میان حرکت تصادفی وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفی بیانگر اثرات کوتاه‌مدت قیمت کالاها بر یکدیگر می‌باشد، بنابراین اگر از مدل‌های دو عاملی اولیه برای مدل‌سازی قیمت نقدی کالاها استفاده شود فقط می‌توان روابط کوتاه‌مدت بین آن‌ها را بررسی کرد. اما مطالعات تجربی زیادی وجود دارند که بعضی از آن‌ها وجود رابطه‌ی بلندمدت میان قیمت گاز طبیعی و نفت را تأیید می‌کنند[۱]. وجود رابطه‌ی بلندمدت میان قیمت نقدی کالاها سبب انحراف از سطح بلندمدت قیمت نقدی هر کالا می‌شود. بنابراین عامل انحراف دیگر وجود رابطه‌ی خطی (بلندمدت) میان قیمت نقدی کالاها است. در این مطالعه سعی بر این است که در مدل‌ها قیمت‌گذاری کالاها با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، روابط بلندمدت میان قیمت کالاها را نیز در نظر گرفته شود. تفاوت اساسی که این مدل با مدل‌های مبتنی بر اقتصاد سنجی (ECM) دارد، این است که در این مطالعه در معادله‌ی دیفرانسیل قیمت نقدی، بازدهی اسایش و خطای بلندمدت وارد شده و با استفاده از داده‌های قیمت آتی وجود روابط بلندمدت بررسی می‌شود. از سوی دیگر مطالعات زیادی رابطه‌ی بلندمدت قیمت گاز طبیعی و نفت را بدون در نظر گرفتن چهار چوب مدل قیمت‌گذاری کالا بررسی کرده‌اند. هم‌چنین مطالعات زیادی وجود دارند که به مدل‌سازی قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی در چهار چوب مدل قیمت‌گذاری کالا به صورت جداگانه پرداخته‌اند. بنابراین ویژگی این مطالعه در نظر گرفتن چهارچوب قیمت‌گذاری کالا همراه با رابطه‌ی بلندمدت و کوتاه‌مدت میان قیمت نفت و گاز طبیعی است.

در این مطالعه بررسی می‌شود که آیا وارد کردن هم حرکتی میان قیمت گاز طبیعی و نفت به واقعی‌سازی مدل‌های موجود دو عاملی برای نفت و گاز طبیعی کمکی

۱- این مدل‌ها بیشر از ادبیات اقتصاد سنجی Error Correction Model (ECM) استفاده کرده‌اند.

می‌کند؟ به عبارتی دیگر آیا سبب افزایش قدرت توضیح دهندگی مدل‌های موجود می‌شود؟

سازمان‌دهی مقاله به این صورت است که در بخش دوم ادبیات تجربی بررسی می‌شوند. در بخش سوم در ابتدا دو مدل پایه‌ی دو عاملی بیان می‌شود، سپس با اضافه کردن رابطه‌ی بلندمدت، مدل بسط‌یافته بیان می‌شود. در بخش چهارم ادبیات فیلتر کالمن بیان می‌شود در بخش پنجم رابطه‌ی بین قیمت نقدی و آتی بررسی شده است. و سپس در بخش ششم با استفاده از ادبیات فیلتر کالمن و دو مدل پایه‌ی دو عاملی و مدل بسط‌یافته‌ی الگوریتم فیلتر کالمن استخراج می‌شود. در نهایت با استفاده از داده‌های قیمت آتی نفت‌خام و گاز طبیعی برای چهار قرارداد با سررسیدهای متفاوت و الگوریتم فیلتر کالمن پارامترهای مدل تخمین زده شده و نتایج و قدرت توضیح دهندگی دو مدل برای قیمت نفت و گاز طبیعی با هم مقایسه می‌شوند.

۲- مرور ادبیات تجربی

با توجه به هدف وارد کردن رابطه‌ی بلندمدت قیمت گاز طبیعی و نفت در مدل‌های قیمت‌گذاری موجود، در ابتدا به بررسی ادبیاتی پرداخته می‌شود که روابط بلندمدت یا هم حرکتی میان قیمت نفت و گاز طبیعی را بررسی می‌کنند.

ویلار و جونز[1] (۲۰۰۶)، به بررسی روابط قیمت نفت و گاز طبیعی می‌پردازند. آن‌ها مشخص می‌کنند که چندین عامل اقتصادی که روابط بین قیمت نفت و گاز طبیعی را شکل می‌دهند هر دو از طرف عرضه و تقاضا هستند. یکی از روابط میان قیمت گاز طبیعی و نفت، بر اثر رقابت میان بخش صنایع و ژنراتورهای برق در به کارگیری محصولات نفت و گاز طبیعی است که این عامل از سمت تقاضا مطرح می‌باشد، زیرا صنایع و ژنراتورهای برقی میان استفاده از گاز طبیعی و محصولات نفتی مرتب جابه‌جا می‌شوند و از انرژی ارزان‌تر استفاده می‌کنند. مطالعه‌ی آن‌ها با استفاده از داده‌های ۱۹۸۹ تا ۲۰۰۵ گرفته و این طور نتیجه داده است که بین نفت و گاز طبیعی یک رابطه‌ی بلندمدت با روند وجود دارد، بنابراین در این مورد رابطه‌ی بلندمدت موجود از نوع جانشینی است.

1- Villar and Joutz.

برون و یوسل[1] (۲۰۰۷)، روابط قیمت‌های هفتگی نفت و گاز طبیعی را در بازه‌ی زمانی ۲۰۰۶-۱۹۹۴ بررسی می‌کنند. در این مطالعه آن‌ها به دنبال عوامل تعیین‌کننده‌ی قیمت گاز طبیعی هستند تحلیل‌های آن‌ها نشان می‌دهد که قیمت‌های هفتگی نفت و گاز طبیعی دارای رابطه‌ی قوی می‌باشند. آن‌ها این روابط را با توجه به آب و هوا، فصول و ذخایر گاز طبیعی بررسی می‌کنند.

هارتلی و همکاران[2] (۲۰۰۸)، به بررسی رابطه‌ی میان قیمت گاز طبیعی و نفت می‌پردازند در این مطالعه آن‌ها از پسماند نفت سوختی که مهم‌ترین محصول نفت‌خام است، استفاده می‌کنند. نفت سوختی به عنوان یک جایگزین مطرح می‌باشد آن‌ها هم چنین از داده‌ها در بازه‌ی زمانی ۲۰۰۶-۱۹۹۰ استفاده کرده و وجود رابطه‌ی بلندمدت میان گاز طبیعی و نفت‌خام را توضیح می‌دهند. نتایج مطالعه‌ی آن‌ها نشان می‌دهد که تغییر تکنولوژی برق می‌تواند راندگی[3] آشکار در این رابطه‌ی بلندمدت را بعد از سال ۲۰۰۰ توضیح دهد.

کاساسوس و همکاران[4] (۲۰۱۰)، در بررسی روابط بلندمدت میان کالا بیان می‌کنند که دو نوع رابطه‌ی کوتاه‌مدت و بلندمدت وجود دارد. رابطه‌ی کوتاه‌مدت بیانگر وجود همبستگی میان قیمت کالاها است، در حالی که رابطه‌ی بلندمدت بیانگر وجود رابطه‌ی اقتصادی میان کالاها است. آن‌ها بیان می‌کنند که رابطه‌ی بلندمدت ممکن است به‌دلیل حداقل یکی از رابطه‌های تولیدی و جانشینی و مکملی به وجود آید. آن‌ها در ابتدا یک مدل قیمت‌گذاری کالا با قابلیت در نظر گرفتن رابطه‌ی بلندمدت ارائه می‌کنند. آن‌ها جهت آزمون مدل‌شان از داده‌های هفتگی قیمت آتی نفت‌خام و نفت مورد استفاده برای گرمایش در بازه‌ی زمانی ۲۰۰۶-۱۹۹۵ استفاده می‌کنند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که رابطه‌ی بلندمدت میان دو کالا در قالب مدل قیمت‌گذاری کالا معنادار است.

سیم و همکاران[5] (۲۰۱۱)، به بررسی رابطه‌ی بلندمدت میان قیمت آتی نفت‌خام و گاز طبیعی می‌پردازند. آن‌ها از داده‌های روزانه برای پنج قرارداد با سررسید متفاوت از گاز طبیعی و نفت در بازه‌ی زمانی ۲۰۰۹-۱۹۹۴ استفاده می‌کنند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که میان قراردادهای یک و دو ماهه برای قیمت نفت و گاز طبیعی در بازه‌ی

1- Brown and Yucel
2- Hartley et al
3- Drift
4- Casassus et al
5- Seim m et al

زمانی ۲۰۰۹-۱۹۹۴رابطه‌ی خطی وجود دارد. برای قراردادهای ۳، ۶ و ۱۲ ماهه در بازه‌ی زمانی ۲۰۰۹-۲۰۰۲ رابطه‌ی خطی مشاهده نمی‌شود.

اما بعضی از مطالعات تجربی دیگر یک رابطه‌ی ضعیف یا عدم رابطه‌ی بلندمدت میان دو قیمت نفت و گاز طبیعی را مشخص می‌کنند که برای مثال می‌توان به مطالعه‌ی سیرلیتز و رانگل-رویز[1] (۲۰۰۴) اشاره کرد. هم چنین بچمیر و گریفین[2] (۲۰۰۶) با استفاده از داده‌های ۲۰۰۷-۱۹۹۰به این نتیجه می‌رسند که رابطه‌ی بلندمدت میان دو قیمت خیلی ضعیف است.

محمدی (۲۰۰۹)، نیز با استفاده از داده‌های ماهانه و سالیانه در بازه‌های زمانی ۲۰۰۷-۱۹۷۰ به مطالعه‌ی رابطه‌ی بلندمدت و کوتاه‌مدت میان قیمت‌های زغال، گاز طبیعی و نفت‌خام می‌پردازد برای این منظور از مدل اتورگرسیو استان‌های استفاده می‌کند و به این نتیجه می‌رسد که نمی‌توان عدم وجود رابطه‌ی بلندمدت را رد کرد.

۳- نتایج تحقیق

همان‌طور که بیان شد هدف این مطالعه بررسی روابط بلندمدت میان قیمت گاز طبیعی و نفت‌خام در قالب مدل قیمت‌گذاری کالاست. به عبارتی هدف بررسی این سئوال است که آیا اضافه کردن روابط بلندمدت میان قیمت کالاها به مدل قیمت‌گذاری پایه(مدل دو عاملی) منجر به توضیح بهتر و واقعی‌کردن بیش‌تر مدل پایه می‌شود یا این‌که تأثیری ندارد. برای این‌که کارایی مدل بسط‌یافته بررسی شود نیاز است که یک مدل چند کالایی دو عاملی بدون در نظر گرفتن رابطه‌ی بلندمدت تخمین زده شود و نتایج حاصله با مدل بسط‌یافته مقایسه شود. بنابراین در ابتدا مدل پایه‌ی دو عاملی برای هر کالا بیان و سپس مدل بسط‌یافته بررسی می‌شود.

مدل پایه‌ی دو عاملی (مدل چند کالایی دو عاملی)[3]

این مدل شامل یک مدل دو عاملی است که یکی از این عوامل ریسکی قیمت نقدی (S) همان کالاست. اما از آن‌جا که مدل‌های قیمت‌گذاری کالا با مدل‌ها قیمت‌گذاری سهام متفاوت هستند. بنابراین در مدل‌های قیمت‌گذاری سهام باید یک سری تغییرات

1- Serletis and Rangel-Ruiz
2- Bachmeier and Griffin
۳- به دلیل پرهیز از حجیم شدن مقاله، از یک سری اثبات پرهیز شده است در صورت نیاز با نویسندگان مقاله تماس گیرید.

داده شود. یکی از دلایل تفاوت مذکور این است که در بازار کالا قیمت کالا تابعی از شرایط تولید کالا است. از سوی دیگر بیش‌تر کالاهای تولیدی (در بازار انرژی به جز برق) قابلیت ذخیره‌سازی دارند. بنابراین در صورت نگهداری آن‌ها منافعی برای نگهدارنده‌ها آن‌ها ایجاد می‌شود که در صورت خرید از بازارهای آتی به صورت قرارداد آتی ایجاد نخواهد شد. این منافع بر حسب نرخ تحت عنوان بازدهی آسایش(δ) نام‌گذاری می‌شود. فرض می‌شود که قیمت نقدی کالای i از فرایند تصادفی برآونی هندسی پیروی کند و برای بازدهی آسایش کالای i ام، فرض می‌شود که از حرکت تصادفی برگشت به سطح بلندمدت پیروی می‌کند، بنابراین مدل دو عاملی برای دو کالای نفت (کالای ۱) و گاز طبیعی (کالای ۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$dS_1(t) = (\mu_1 - \delta_1(t))S_1(t)dt + \sigma_1 dw_1^*(t) \qquad (۳-۱a)$$

$$d\delta_1(t) = K_1(\alpha_1 - \delta_1(t))dt + \sigma_{\delta_1} dw_{\delta_1}^*(t) \qquad (۳-۱b)$$

$$d\delta_2(t) = K_2(\alpha_2 - \delta_2(t))dt + \sigma_{\delta_2} dw_{\delta_2}^*(t) \qquad (۳-۱c)$$

$$dS_2(t) = (\mu_2 - \delta_2(t))S_2(t)dt + \sigma_2 dw_2^*(t) \qquad (۳-۱d)$$

که پارامترهای μ_i بیانگر سطح بلندمدت قیمت کالای i ام، σ_i بیانگر نوسان قیمت برای کالای i ام، δ_i بیانگر بازدهی آسایش کالای i ام، σ_{δ_i} واریانس بازدهی آسایش برای کالای کالای i ام، K_i سرعت برگشت به میانگین بلندمدت برای بازدهی آسایش، α_i بیانگر سطح بلندمدت بازدهی آسایش، dw بیانگر تغیرات فرایند وینر و d بیانگر علامت دیفرانسیل می‌باشند. فرض می‌شود که در سسیتم معادلات تصادفی فوق تغییرات حرکت وینر($dw^* = [dw_1^*(t), dw_2^*(t), dw_{\delta_1}^*(t), dw_{\delta_2}^*(t)]^T$) با همدیگر همبستگی دارند، بنابراین ماتریس همبستگی بین آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\langle dw^* \rangle \langle dw^* \rangle^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} \\ \rho_{12} & \sigma_2^2 & \rho_{2\delta_1} & \rho_{2\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_1} & \sigma_{\delta_1}^2 & \rho_{\delta_1\delta_2} \\ \rho_{2\delta_1} & \rho_{2\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \sigma_{\delta_2}^2 \end{bmatrix} dt = \Omega \qquad (۳-۲)$$

که Ω بیانگر ماتریس همبستگی میان اجزای وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفی فوق می‌باشد. حال تحت فرض احتمال ریسک-خنثی، رفتار قیمت نقدی و بازدهی آسایش به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$dS_i(t) = (r - \delta_i(t))S_i(t)dt + \sigma_i(\frac{\mu_i - r}{\sigma_i} + dw_i^*(t)) \qquad (۳-۳a)$$
$$= (r - \delta_i(t))S_i(t)dt + \sigma_i dw_i(t)$$

$$d\delta_i(t) = K_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i}(\frac{\lambda_i}{\sigma_{\delta_i}} + dw_{\delta_i}^*(t))$$
$$= K_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dw_{\delta_i}(t) \qquad (۳-۳b)$$
$$i = ۱,۲$$

که r نرخ بهره‌ی بدون ریسک و ثابت، λ_iقیمت بازاری بازدهی آسایش و $\hat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i - \lambda_i}{K_i}$ می‌باشد.

چون معادلات دیفرانسیل تصادفی رفتار قیمت گاز طبیعی و نفت غیر خطی هستند با استفاده از لم ایتو و تغییر متغیر $X_i = Ln(S_i(t))$ آن‌ها را خطی می‌کنیم:

$$dX_i(t) = (r - \frac{\sigma_i}{۲} - \delta_i(t))dt + \sigma_i dw_i(t) \qquad (۳-۴a)$$
$$d\delta_i(t) = K_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dw_{\delta_i}(t) \qquad (۳-۴b)$$

دو معادله‌ی نهایی بالا برای استخراج معادله‌ی انتقال در الگوریتم فیلتر کالمن به کار می‌روند. هم‌چنین در بخش (۶-۱) نحوه‌ی استخراج الگوریتم فیلتر کالمن برای این مدل بیان خواهد شد.

بسط مدل

در این مدل فرض می‌شود که علاوه بر بازدهی آسایش، خطای بلندمدت ($e(t)$) میان قیمت دو کالا نیز سبب انحراف قیمت از سطح بلندمدت می‌شود. از آن‌جا که خطای بلندمدت می‌تواند اثرات متفاوتی بر انحراف قیمت از سطح بلندمدت داشته باشد در این صورت در هر معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی با یک ضریب وارد می‌شود، بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی بسط‌یافته برای هر کالا تحت فرض ریسک خنثی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$dS_i(t) = (r - \delta_i(t) + b_i e(t))S_i(t)dt + \sigma_i dw_i(t) \qquad (۳-۵a)$$
$$d\delta_i(t) = K_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dw_{\delta_i}(t) \qquad (۳-۵b)$$

حال با استفاده از لم ایتو و فرض $X_i = Ln(S_i(t))$، برای دیفرانسیل لگاریتم قیمت نقدی تحت احتمال ریسک خنثی می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی را به صورت زیر نوشت:

$$dLn(S_i(t)) = (r - \frac{\sigma_i^2}{2} - \delta_i(t) + b_i e(t))dt + \sigma_i dw_i(t) \qquad (۳-۶a)$$

$$d\delta_i(t) = K_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dw_{\sigma_{\delta_i}}(t) \qquad (۳-۶b)$$

برای هر i دو حرکت وینر وجود دارد، بنابراین برای مدل دو کالایی چهار حرکت وینر وجود دارد که ماتریس همبستگی آن‌ها با ماتریس همبستگی (Ω) در مدل قبلی یکسان است. حال از ادبیات هم جمعی در اقتصادسنجی، خطای بلندمدت برای دو متغیر $Ln(S_1(t))$ و $Ln(S_2(t))$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_1 Ln(S_1(t)) + a_2 Ln(S_2(t)) + \mu_e + a_0 t = e(t) \qquad (۳-۷)$$

که (a_1, a_2) بیانگر بردار هم‌جمعی بین دو متغیر $Ln(S_1(t))$ و $Ln(S_2(t))$ می‌باشد. حال اگر $e(t)$ را در معادلات مرتبط به $dLn(S_i(t))$ جایگزین کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} dLn(S_i(t)) &= (\beta_{i0}(t) + \beta_{i\delta_i}\delta_i(t) + \beta_{i1} Ln(S_1(t)) \\ &\quad + \beta_{i2} Ln(S_2(t)))dt + \sigma_i dw_i(t) \end{aligned} \qquad (۳-۸a)$$

$$d\delta_i(t) = (\beta_{\delta_i 0}(t) + \beta_{\delta_i\delta_i}\delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dw_{\sigma_{\delta_i}}(t) \qquad (۳-۸b)$$

که

$$\beta_{i0}(t) = r - \frac{\sigma_i^2}{2} + b_i\mu_e + b_i a_0 t\ ,\ \beta_{i\delta_i} = -1,\ \beta_{i1} = b_i a_1,$$

$$\beta_{i2} = b_i a_2\ ,\ \beta_{\delta_i 0} = -K_i\hat{\alpha}_i,\quad \beta_{\delta_i\delta_i} = -K_i$$

حال با تعریف $Y(t) = [Ln(S_1(t)),\ Ln(S_2(t)),\ \delta_1(t),\ \delta_2(t)]^T$ [1] و نوشتن سیستم معادلات دیفرانسیل فوق بر حسب $Y(t)$ و با انتگرال‌گیری از فرم ماتریسی معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی در بازه‌ی زمانی $[t,T]$ به جواب زیر می‌رسیم:

$$Y(T) = e^{(T-t)\beta}\left\{Y(t) + \int_t^T e^{-s\beta}\beta_0(s)\,ds + \int_t^T e^{-s\beta} dW_0(s)\,ds\right\} \qquad (۳-۱۰)$$

---

۱ - A^T بیانگر ترانسپوز ماتریس A است.

که در جواب به‌دست آمده از انتگرال‌گیری، $w_{\cdot}(t)$، $\beta_{\cdot}(t)$ و β به صورت زیر می‌باشند:

$$w_{\cdot}(t) = [\sigma_1 w_1(t), \sigma_2 w_2(t), \sigma_{\delta_1} w_{\delta_1}(t), \sigma_{\delta_2} w_{\delta_2}(t)]^T$$

$$\beta_{\cdot}(t) = [\beta_{1\cdot}(t)\ \beta_{2\cdot}(t)\ \beta_{\delta_1\cdot}(t)\ \beta_{\delta_2\cdot}(t)]^T$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{1\delta_1} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{12} & 0 & \beta_{2\delta_2} \\ 0 & 0 & \beta_{\delta_1\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix}$$

رابطه‌ی قیمت آتی و قیمت نقدی

قیمت آتی قرارداد در زمان t و سررسید در زمان T معادل با ارزش مورد انتظار از قیمت نقدی تحت اندازه‌ی ریسک گریزی به صورت زیر می‌باشد:

$$F_i(t,T) = E(S_i(t,T)) \qquad (۴-۱)$$

فیلتر کالمن

از آن‌جا که بازدهی آسایش را به صورت مستقل نداریم و هم‌چنین فرض می‌شود که داده‌های قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی را نیز در دسترس نمی‌باشد[۱]. بنابراین با استفاده از فیلتر کالمن و یک متغیر قابل مشاهده می‌توان پارامترهای معادلات دیفرانسیل تصادفی موجود در بازدهی آسایش و قیمت نقدی را به‌دست آورد. بعد از تخمین این پارامترها می‌توان بازدهی آسایش و قیمت نقدی را شبیه سازی کرد. از آن‌جا که بین قیمت آتی و قیمت نقدی رابطه‌ی (۱-۴) برقرار است و قیمت آتی در بازارهای آتی موجود است بنابراین برای انجام مراحل فوق می‌توان از قیمت آتی به عنوان متغیر قابل مشاهده به همراه فیلتر کالمن استفاده کرد[۲].

۱- این داده‌ها هر چند در مراکز آماری منتشر شده‌اند، اما این داده‌ها در قالب یکسری قراردادهای آتی تعیین می‌شوند، زیرا نفتی که به نفت‌کش تحویل داده می‌شود قیمت ان از محل بارگیر تا محل تحویل چندین بار تغییر می‌کند، زیرا برای نفت یک سری مشتقات تعریف می‌شود که بر قیمت آن تأثیر می‌گذارند، بنابراین با یک خطا قابل مشاهده می‌باشند.

۲- برای جزییات بیش‌تر به ضمیمه‌ی A مراجعه شود

استخراج معادلات فیلتر کالمن مدل

استخراج الگوریتم کالمن مدل پایه‌ی دو عاملی

در ابتدا به استخراج معادله‌ی انتقال می‌پردازیم. همان‌طور که قبلا بیان شد متغیرهای S_t و δ_t غیر قابل مشاهده هستند بنابراین معادله‌ی انتقال از معادلات مربوط به حرکت این دو متغیر غیرقابل مشاهده (۳-۳a) و (۳-۳b) استخراج می‌شود. قیمت نقدی کالای i با انتگرال‌گیری از سیستم معادلات (۳-۳a) و (۳-۳b) در بازه‌ی زمانی $[t,T]$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_i(T) = S_i(t)\exp\{X_i(t,T)\}$$

$$X_i(t,T) = \left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} - \hat{\alpha}_i\right)(T-t) + \frac{\hat{\alpha}_i - \delta_i(t)}{K_i} \qquad (۱-۶)$$

$$\left(1 - \exp\left(-K_i(T-t)\right)\right) + \sigma_i \int_t^T dw_i(s)$$

$$-\frac{1}{K_i}\sigma_{\delta_i}\int_t^T dw_i(s) + \int_t^T \frac{\exp\left(-K_i(T-s)\right)}{K_i}\sigma_{\delta_i} dw_{\sigma_{\delta_i}}(s)$$

حال از (۱-۶) و (۴-۶) قیمت آتی کالای i ام به صورت زیر نوشته می‌شود[۱].

$$F_i(t,T) = S_i(t)\exp\left\{\begin{array}{l}\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} - \hat{\alpha}_i\right)(T-t) + \frac{\hat{\alpha}_i - \delta_i(t)}{K_i}\left(1 - \exp\left(-K_i(T-t)\right)\right) + \\ + \left(-\frac{\sigma_{\delta_i}^2}{K_i^3} + \frac{\sigma_{i\delta_i}}{K_i}\right)\left(1 - e^{-K_i(T-t)}\right) + \frac{\left(\sigma_i^2 + \frac{\sigma_{\delta_i}^2}{K_i^2} - 2\frac{\sigma_{i\delta_i}^2}{K_i}\right)(T-t)}{2} \\ + \frac{\frac{\sigma_{\delta_i}^2}{K_i^3}\left(1 - e^{-2K_i(T-t)}\right)}{2}\end{array}\right\} \qquad (۲-۶)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ی انتقال از مدل پایه‌ای دو عاملی به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا در جواب به‌دست آمده برای قیمت نقدی کالای i ام (۱-۶) تبدیل‌های $T \to t$ و $t \to t - \Delta t$ را انجام می‌دهیم

۱- برای استخراج (۲-۶) به نویسندگان مقاله ایمیل بزنید.

$$S_i(t) = S_i(t-\Delta t)\exp\{X_i(t-\Delta t, t)\}$$

$$X_i(t-\Delta t, t) = \left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} - \hat{\alpha}_i\right)(\Delta t) + \frac{\hat{\alpha}_i - \delta_i(t-\Delta t)}{K_i}\left(1 - e^{(-K_i(\Delta t))}\right) \qquad (۶-۳)$$

$$+\sigma_i \int_{t-\Delta t}^{t} dw_i(s) - \frac{1}{K_i}\sigma_{\delta_i}\int_{t-\Delta t}^{t} dw_{\delta_i}(s) + \int_{t-\Delta t}^{t} \frac{\exp(-K_i(t-s))}{K_i}\sigma_{\delta_i} dw_{\delta_i}(s)$$

حال با گرفتن لگاریتم از طرفین معادله‌ی بالا و مقایسه با معادله‌ی انتقالی $(x_t = Tx_{t-\Delta t} + d + \eta_{t-\Delta t})$ از فیلتر کالمن، بردارها و ماتریس‌های معادله‌ی انتقال برای مدل پایه به صورت زیر نوشته می‌شوند[۱]:

$$X_t = \left[L\,n(S_1(t)), L\,n(S_2(t)), \delta_1(t), \delta_2(t)\right] \qquad (۶-۴a)$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11}(\Delta t) & T_{12}(\Delta t) & T_{1\delta_1}(\Delta t) & T_{1\delta_2}(\Delta t) \\ T_{21}(\Delta t) & T_{22}(\Delta t) & T_{2\delta_1}(\Delta t) & T_{2\delta_2}(\Delta t) \\ T_{\delta_1 1}(\Delta t) & T_{\delta_1 2}(\Delta t) & T_{\delta_1\delta_1}(\Delta t) & T_{\delta_1\delta_2}(\Delta t) \\ T_{\delta_2 1}(\Delta t) & T_{\delta_2 2}(\Delta t) & T_{\delta_2\delta_1}(\Delta t) & T_{\delta_2\delta_2}(\Delta t) \end{pmatrix} \qquad (۶-۴b)$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1(\Delta t) \\ d_2(\Delta t) \\ d_{\delta_1}(\Delta t) \\ d_{\delta_2}(\Delta t) \end{bmatrix} \qquad (۶-۴c)$$

$$Q = var(\eta_t) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\Delta t) & \sigma_{12}(\Delta t) & \sigma_{1\delta_1}(\Delta t) & \sigma_{1\delta_2}(\Delta t) \\ \sigma_{21}(\Delta t) & \sigma_{22}(\Delta t) & \sigma_{2\delta_1}(\Delta t) & \sigma_{2\delta_2}(\Delta t) \\ \sigma_{\delta_1 1}(\Delta t) & \sigma_{\delta_1 2}(\Delta t) & \sigma_{\delta_1\delta_1}(\Delta t) & \sigma_{\delta_1\delta_2}(\Delta t) \\ \sigma_{\delta_2 1}(\Delta t) & \sigma_{\delta_2 2}(\Delta t) & \sigma_{\delta_2\delta_1}(\Delta t) & \sigma_{\delta_2\delta_2}(\Delta t) \end{pmatrix} \qquad (۶-۴d)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۶-۵a)$$

$$T_{i\delta_j}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta_{i\delta_i}}{\beta_{\delta_i\delta_i}}\left(e^{\beta_{\delta_i\delta_i} t} - 1\right) & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۶-۵b)$$

۱- در صورت نیاز به استخراج معادلات به نویسندگان مقاله ایمیل بزنید.

$$T_{\delta_i j} = ۰ \qquad (۶-۵c)$$

$$T_{\delta_i \delta_j} = \begin{cases} e^{\beta_{\delta_i \delta_j} t} & \text{if } i = j \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۶-۵d)$$

$$d_i(t) = \beta_{i.} t + \frac{\beta_{i\delta_i}\beta_{\delta_i ۰}}{\beta^{۲}_{\delta_i\delta_i}}(e^{\beta_{\delta_i\delta_i} t} - ۱) - \frac{\beta_{i\delta_i}\beta_{\delta_i .} t}{\beta_{\delta_i\delta_i}} \qquad (۶-۶a)$$

$$d_{\delta_i}(t) = \frac{\beta_{\delta_i ۰}}{\beta_{\delta_i\delta_i}}(e^{\beta_{\delta_i\delta_i} t} - ۱) \qquad (۶-۶b)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\beta_{i\delta_i}\beta_{j\delta_j}\rho_{\delta_i\delta_j}\sigma_{\delta_i}\sigma_{\delta_j}}{\beta_{\delta_i\delta_i}\beta_{\delta_i\delta_j}}\left(\begin{array}{l} -\frac{۱}{\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j})t}) \\ +\frac{۱}{\beta_{\delta_i\delta_i}}(۱-e^{(\beta_{\delta_i\delta_i})t}) + \frac{۱}{\beta_{\delta_j\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_j\delta_j})t}) + t \end{array}\right) \qquad (۶-۷a)$$

$$+\frac{\beta_{i\delta_i}\rho_{\delta_i j}\sigma_{\delta_i}\sigma_j}{\beta_{\delta_i\delta_i}}\left(-\frac{۱}{\beta_{\delta_i\delta_i}}(۱-e^{(\beta_{\delta_i\delta_i})t}) - t\right)$$

$$\sigma_{i\delta_j}(t) = \frac{\beta_{i\delta_i}\rho_{\delta_i\delta_j}\sigma_{\delta_i}\sigma_{\delta_j}}{\beta_{\delta_i\delta_i}}\left(\begin{array}{l} -\frac{۱}{\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j})t}) \\ +\frac{۱}{\beta_{\delta_j\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_j\delta_j})t}) \end{array}\right) \qquad (۶-۷b)$$

$$-\frac{\rho_{i\delta_j}\sigma_i\sigma_{\delta_j}}{\beta_{\delta_j\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_j\delta_j})t})$$

$$\sigma_{\delta_i\delta_j}(t) = -\frac{\rho_{\delta_i\delta_j}\sigma_{\delta_i}\sigma_{\delta_j}}{\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j}}(۱-e^{(\beta_{\delta_i\delta_i}+\beta_{\delta_i\delta_j})t}) \qquad (۶-۷c)$$

در مرحله‌ی بعدی به استخراج معادله‌ی اندازه‌گیری می‌پردازیم. برای این منظور، معادله‌ی اندازه‌گیری در فیلتر کالمن ($y_t = Z_t x_t + C_t + \varepsilon_t$) را با معادله‌ی حاصل از رابطه‌ی قیمت آتی و نقدی مدل پایه‌ی (۲-۶) مقایسه می‌کنیم:

$$y_t = \left[Ln(F_۱(t,T_{۱,۱})),...,Ln(F_۱(t,T_{۱,k})),Ln(F_۲(t,T_{۲,۱})),...,Ln(F_۲(t,T_{۲,k}))\right]^T \qquad (۶-۸)$$

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{F_1(t,T_{1,1})1} & Z_{F_1(t,T_{1,1})2} & Z_{F_1(t,T_{1,1})\delta_1} & Z_{F_1(t,T_{1,1})\delta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{F_1(t,T_{1,k})1} & Z_{F_1(t,T_{1,k})2} & Z_{F_1(t,T_{1,k})\delta_1} & Z_{F_1(t,T_{1,k})\delta_2} \\ Z_{F_2(t,T_{2,1})1} & Z_{F_2(t,T_{2,1})2} & Z_{F_2(t,T_{2,1})\delta_1} & Z_{F_2(t,T_{2,1})\delta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{F_2(t,T_{2,k})1} & Z_{F_2(t,T_{2,k})2} & Z_{F_2(t,T_{2,k})\delta_1} & Z_{F_2(t,T_{2,k})\delta_2} \end{bmatrix} \qquad (۶-۹a)$$

$$Z_{G_i(t,T_{i,k})j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۶-۹b)$$

$$Z_{G_i(t,T_{i,k})\delta_j} = \begin{cases} -\dfrac{1-e^{K_i T_{i,k}}}{K_i} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۶-۹c)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} C_1(t,T_{1,1}) + \dfrac{\sigma^2_{X_1}(t,T_{1,1})}{2} \\ \vdots \\ C_1(t,T_{1,k}) + \dfrac{\sigma^2_{X_1}(t,T_{1,k})}{2} \\ C_2(t,T_{2,1}) + \dfrac{\sigma^2_{X_2}(t,T_{2,1})}{2} \\ \vdots \\ C_2(t,T_{2,k}) + \dfrac{\sigma^2_{X_2}(t,T_{2,k})}{2} \end{bmatrix} \qquad (۶-۱۰a)$$

$$C_i(t,T) = (r - \frac{\sigma_i^2}{2} - \hat{\alpha}_i)(T-t) + \frac{\hat{\alpha}_i}{K_i}(1-e^{K_i(T-t)}) \qquad (۶-۱۰b)$$

$$R = \mathrm{cov}(\varepsilon_t) = \mathrm{diag}\{R_{1,1},...,R_{k,k},R_{2,2},...,R_{k,k}\}_{2k\times 2k} \qquad (۶-۱۱)$$

بنابراین الگوریتم فیلتر کالمن برای مدل پایه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x_{t|t-1} = d_{t-1} + Tx_{t-1|t-1} \qquad (۶-۱۲a)$$

$$P_{t|t-1} = T_{t-1}P_{t-1|t-1}T_{t-1}' + Q \qquad (۶-۱۲b)$$

$$F_{t|t-1} = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + var(\varepsilon) \qquad (۶-۱۲c)$$

$$K_t = P_{t|t-1} Z_t' F_{t|t-1}^{-1} \qquad (۶-۱۲d)$$

$$x_{t|t} = x_{t|t-1} + K_t(y_t - C_t - Z_t x_{t|t-1}) \qquad (۶-۱۲e)$$

$$P_{t|t} = P_{t-1|t-1} - K_t Z_t P_{t-1|t-1} \qquad (۶-۱۲f)$$

استخراج الگوریتم فیلتر کالمن مدل بسط یافته

همانند بخش قبل در ابتدا به استخراج معادله‌ی انتقال می‌پردازیم. همان‌طور که قبلا بیان شد متغیرهای S_t و δ_t غیر قابل مشاهده هستند، بنابراین معادله‌ی انتقال از معادلات مربوط به حرکت این دو متغیر غیرقابل مشاهده (۳-۸a) و (۳-۸b) استخراج می‌شود. معادلات تصادفی برای این متغیرها به صورت زیر می‌باشد. از آن‌جا که در سمت راست معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی (۳-۸a)، $Ln(S_i(t))$ برای $i = ۱,۲$ وارد شده است برای به‌دست آوردن معادله‌ی انتقال ابتدا باید معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی مربوط به قیمت نقدی را حل کرد. اگر در معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به کالای یک لگاریتم قیمت کالای دو در زمان t وارد نشده بود می‌توانستیم با عمل گسسته‌سازی معادله‌ی انتقال برای متغیر قیمت نقدی کالای ۱ در زمان t را بر حسب قیمت کالای ۱ در زمان $t-۱$ نوشت و معادله‌ی انتقال را به‌دست آورد، اما چون در معادله‌ی انتقال بایستی متغیر حالت در زمان t بر حسب متغیرهای حالت در زمان $t-۱$ نوشته شود، بنابراین باید مدل به گونه‌ای حل شود که مقادیر جاری لگاریتم قیمت کالای یک و دو از سمت راست حذف شود.

برای حل فرض کنید که قیمت بازاری ریسک تنها به صورت یک عبارت ثابت است، یعنی حرکت براونی تحت احتمال ریسک خنثی ($w(t)$) و حرکت براونی تحت احتمال طبیعی($w^p(t)$) رابطه‌ی زیر را برقرار می‌کنند[۱].

$$w(t) = w^p(t) + \int_0^t \omega_s ds \qquad (۶-۱۳a)$$

۱- به منظور تخمین مدل پایه نیز از رویه‌ی کار ذکر شده برای مدل بسط‌یافته استفاده می‌شود، به عبارتی علاوه بر پارامترهای موجود، پارامترهای قیمت ریسک(ω_t) بایستی تخمین زده شوند. برای تخمین ابتدا یک مدل بسط یافته تخمین زده می‌شود، سپس در کدهای نوشته شده برای مطلب ضرایب مربوط به خطای بلند مدت صفر در نظر گرفته می‌شوند.

$$w(t)=\left[w_1(t),\ w_2(t),\ w_{\delta_1}(t),\ w_{\delta_2}(t)\right]^T \qquad (۶-۱۳b)$$

$$w^p(t)=\left[w_1^p(t),\ w_2^p(t),\ w_{\delta_1}^p(t),\ w_{\delta_2}^p(t)\right](b13-6)^T \qquad (۶-۱۳c)$$

$$\omega_0=\left[\omega_{10},\ \omega_{20},\ \hat{\beta}\omega_{\delta_1 0},\ \omega_{\delta_2 0}\right]^T \qquad (۶-۱۳d)$$

در نتیجه جایگزینی فرض $w(t)=w^p(t)+\int_0^t \omega_0 ds$ در (۳-۸a) و (۳-۸b) داریم:

$$dLn(S_i(t))=(\gamma_{i0}(t)+\gamma_{i\delta_i}\delta_i(t)+\gamma_{i1}Ln(S_1(t))+\gamma_{i2}Ln(S_2(t)))dt + \sigma_i dw_i^p(t) \qquad (۶-۱۴a)$$

$$d\delta_i(t)=(\gamma_{\delta_i 0}(t)+\gamma_{\delta_i\delta_i}\delta_i(t))dt+\sigma_{\delta_i}dw_{\sigma_{\delta_i}}^p(t) \qquad (۶-۱۴b)$$

$$i=1,2$$

که

$$\gamma_{i0}(t)=r-\frac{\sigma_i^2}{2}+b_i\mu_e+b_i a_0 t+\sigma_i\omega_{i0},\ \gamma_{i\delta_i}=-1,\ \gamma_{i1}=b_i a_1,\ \gamma_{i2}=b_i a_2,$$

$$\gamma_{\delta_i 0}=-K_i\hat{\alpha}_i+\sigma_{\delta_i}\omega_{\delta_i 0},\ \gamma_{\delta_i\delta_i}=-K_i$$

بنابراین با فرض $dY(t)=[dLn(S_1(t)),\ dLn(S_2(t)),\ d\delta_1(t),\ d\delta_2(t)]^T$، جواب (۶-۱۴a) و (۶-۱۴b) در قالب ماتریس به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Y(t)=e^{(t-0)\gamma}\left\{Y(0)+\int_0^t e^{-s\gamma}\gamma_0(s)ds+\int_0^t e^{-s\gamma}dw_0^p(s)ds\right\} \qquad (۶-۱۵)$$

که در معادله‌ی دیفرانسیل فوق داریم:

$$\gamma_0(t)=\left[\gamma_{10}(t),\ \gamma_{20}(t),\ \gamma_{\delta_1 0}(t),\ \gamma_{\delta_2 0}(t)\right]^T$$

$$=\begin{bmatrix} r-\frac{\sigma_1^2}{2}+b_1\mu_e+b_1 a_0 t+\sigma_1\theta_{10} \\ r-\frac{\sigma_2^2}{2}+b_2\mu_e+b_2 a_0 t+\sigma_1\theta_{10} \\ -K_1\hat{\alpha}_1+\sigma_{\delta_1}\theta_{\delta_1 0} \\ -K_2\hat{\alpha}_2+\sigma_{\delta_2}\theta_{\delta_2 0} \end{bmatrix} \qquad (۶-۱۶)$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1\delta_1} & 0\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \gamma_{1\delta_2}\\ 0 & 0 & \gamma_{\delta_1\delta_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\delta_2\delta_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1a_1 & b_1a_2 & -1 & 0\\ b_2a_1 & b_2a_2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -K_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -K_1\end{bmatrix} \qquad (۶-۱۷)$$

$$w_{\cdot}^{p}(t)=\left[\sigma_1 w_1^p(t),\ \sigma_2 w_2^p(t),\ \sigma_{\delta_1} w_{\delta_1}^p(t),\ \sigma_{\delta_2} w_{\delta_2}^p(t)\right]^T \qquad (۶-۱۸)$$

حال از مقایسه‌ی (۶-۱۵) و معادله‌ی انتقال در فیلتر کالمن $(x_{t+1}=d_t+T_t x_t+\eta_t)$، اجزای معادله‌ی انتقال برای مدل مورد نظر به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$x_t=\left[Ln(S_1(t)),\ Ln(S_2(t)),\ \delta_1(t),\ \delta_2(t)\right]^T \qquad (۶-۱۹a)$$

$$d_t=e^{\Delta t\gamma}\int_{\cdot}^{t}e^{-s\gamma}\gamma_{\cdot}(s)ds \qquad (۶-۱۹b)$$

$$T_t=e^{\Delta t\gamma} \qquad (۶-۱۹c)$$

$$\eta_t=e^{\Delta t\gamma}\int_{\cdot}^{\Delta t}e^{-s\gamma}dw^p(s)ds \qquad (۶-۱۹d)$$

$$var(\eta_t)=\int_{\cdot}^{\Delta t}\left(e^{(t-s)\gamma}\right)\Theta\left(e^{(t-s)\gamma}\right)^T ds=\Xi \qquad (۶-۱۹e)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ی اندازه‌گیری از رابطه‌ی بین قیمت آتی و نقدی استفاده شده که برای مدل بسط‌یافته به صورت زیر نوشته می‌شود[1]:

$$Ln(F_i(t,T)=Y(\cdot)+\int_{\cdot}^{t}e^{(t-s)\gamma}\gamma_{\cdot}(s)ds+\frac{\int_{\cdot}^{t}\left(e^{(t-s)\gamma}\right)\Theta\left(e^{(t-s)\gamma}\right)^T ds}{2} \qquad (۶-۲۰)$$

اگر قیمت‌های آتی دارای قراردادهای با k تا سررسید باشند در این صورت داریم:

$$F(t,T)=\left[F_1(t,T_{1,1}),\ldots,F_1(t,T_{1,k}),F_2(t,T_{2,1}),\ldots,F_2(t,T_{2,k})\right] \qquad (۶-۲۱)$$

حال با مقایسه‌ی معادله‌ی (۶-۲۰) و تعریف $F(t,T)$ با معادله‌ی اندازه‌گیری برای فیلتر کالمن $(A-1b)$، می‌توان معادله‌ی اندازه‌گیری برای مدل مورد نظر را استخراج

۱- برای استخراج رابطه‌ی (۶-۲۰) به نویسندگان مقاله ایمیل بزنید

کرد. بنابراین داریم:

$$y_t = \begin{bmatrix} Ln(F_1(t,T_{1,1})),...,Ln(F_1(t,T_{1,k})),Ln(F_2(t,T_{2,1})) \\ ,...,Ln(F_2(t,T_{2,k})) \end{bmatrix}^T \qquad (۶-۲۲)$$

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{F_1(t,T_{1,1})} & \cdots & Z_{F_1(t,T_{1,k})} & Z_{F_2(t,T_{2,1})} & \cdots & Z_{F_2(t,T_{2,k})} \end{bmatrix}^T \qquad (۶-۲۳)$$

$$C_t = \begin{bmatrix} C_1(t,T_{1,1}) + \dfrac{\sigma^2_{X_1}(t,T_{1,1})}{2} \\ \vdots \\ C_1(t,T_{1,k}) + \dfrac{\sigma^2_{X_1}(t,T_{1,k})}{2} \\ C_2(t,T_{2,1}) + \dfrac{\sigma^2_{X_2}(t,T_{2,1})}{2} \\ \vdots \\ C_2(t,T_{1,k}) + \dfrac{\sigma^2_{X_2}(t,T_{2,k})}{2} \end{bmatrix} \qquad (۶-۲۴)$$

$$R = cov(\varepsilon_t) = diag\{R_{1,1},...,R_{k,k},R_{2,2},...,R_{k,k}\}_{2k\times 2k} \qquad (۶-۲۵)$$

که $Z_{F_i(t,T)}$ iامین ردیف از ماتریس $e^{(T-t)\beta}$ است $C_i(t,T) = [e^{(T-t)\beta}\int_t^T e^{-s\beta}\omega_.(s)ds]_i$ iامین عنصر از $e^{(T-t)\beta}\int_t^T e^{-s\beta}\omega_.(s)ds$ است، بنابراین معادله‌ی اندازه‌گیری به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۶-۲۶)

$$y_t = e^{\Delta t\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1\delta_1} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \gamma_{2\delta_2} \\ 0 & 0 & \gamma_{\delta_1\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} Ln(S_1(t-\Delta t)) \\ Ln(S_2(t-\Delta t)) \\ \delta_1(t-\Delta t) \\ \delta_2(t-\Delta t) \end{Bmatrix} + \int_t^{\Delta t} e^{\Delta t\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1\delta_1} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \gamma_{2\delta_2} \\ 0 & 0 & \gamma_{\delta_1\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \gamma_{1.}(s) \\ \gamma_{2.}(s) \\ \gamma_{\delta_1.}(s) \\ \gamma_{\delta_2.}(s) \end{Bmatrix} ds$$

$$+ \frac{\int_t^{\Delta t} \left(e^{\Delta t-s\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1\delta_1} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \gamma_{2\delta_2} \\ 0 & 0 & \gamma_{\delta_1\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \sigma^2_{22} & \rho_{12} & \rho_{1\delta_1} & \rho_{1\delta_2} \\ \rho_{21} & \sigma^2_{22} & \rho_{2\delta_1} & \rho_{2\delta_2} \\ \rho_{1\delta_1} & \rho_{2\delta_1} & \sigma^2_{\delta_1\delta_1} & \rho_{\delta_1\delta_2} \\ \rho_{1\delta_2} & \rho_{2\delta_2} & \rho_{\delta_1\delta_2} & \sigma^2_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix} \left[e^{\Delta t-s\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{1\delta_1} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \gamma_{2\delta_2} \\ 0 & 0 & \gamma_{\delta_1\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\delta_2\delta_2} \end{bmatrix}} \right]^T \right) ds}{2}$$

در نهایت الگوریتم فیلتر کالمن مانند بخش قبلی است، با این تفاوت که ماتریس‌ها ضرایب و واریانس-کوواریانس دو مدل با هم متفاوت هستند.

داده‌ها

در این مطالعه از داده‌های ماهانه‌ی قیمت آتی نفت‌خام و گاز طبیعی مبادله شده در بازار بورس نیویورک (NYMEX) در بازه‌ی زمانی ۲۰۱۱-۱۹۹۴ استفاده می‌شود. چهار قرارداد آتی برای نفت و گاز طبیعی به ترتیب با Fo1, Fo2, Fo3, Fo4 و Fg1, Fg2, Fg3, Fg4 نشان داده می‌شود. امار توصیفی این داده‌ها در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۱- آمار توصیفی قیمت‌های آتی نفت و گاز

Variable	Obs	Mean	.Std. Dev	Min	Max
Fg1	۲۲۸	۴/۴۱۵	۲/۴۶۹	۱/۴۲۶	۱۳/۴۵۴
Fg2	۲۲۸	۴/۵۱۸	۲/۵۲۵	۱/۴۴۸	۱۳/۸۲۷
Fg3	۲۲۸	۴/۵۹۲	۲/۵۷۵	۱/۴۹	۱۴/۱۷۸
Fg4	۲۲۸	۴/۶۳۵	۲/۵۸۵	۱/۵۱۹	۱۴/۰۱
Fo1	۲۲۸	۴۶/۹۴۱	۳۰/۳۱۷	۱۱/۳۱	۱۳۴/۰۲
Fo2	۲۲۸	۴۷/۱۱۳	۳۰/۵۹۶	۱۱/۶۴	۱۳۴/۵۲
Fo3	۲۲۸	۴۷/۲۱۷	۳۰/۸۵۲	۱۱/۹۵	۱۳۴/۷۸
Fo4	۲۲۸	۴۷/۲۶۵	۳۰/۰۷۳	۱۲/۲۳	۱۳۴/۸۹

منبع: www. eia. gov

تخمین

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد هدف این مطالعه اضافه کردن هم حرکتی میان قیمت نقدی نفت و گاز در بلندمدت می‌باشد. برای این‌که کارایی مدل بسط‌یافته بررسی شود، بایستی مدل پایه‌ای که بسط روی آن انجام شده است نیز تخمین زده شود. برای تخمین مدل پایه و بسط‌یافته از الگوریتم فیلتر کالمن نوشته شده در بخش‌های (۱-۶)

و (۲-۶) به همراه تابع حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود. به‌منظور تخمین از نرم‌افـزار مطلب (MATLAB)[1] استفاده شده است. نتایج در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲- تخمین ضرایب دومدل پایه و بسط‌یافته (اعداد داخل پرانتز انحراف معیار هستند)[2]

پارامترها	مدل پایه	مدل بسط یافته
k_1	۰/۲۴۷۱ (۰/۰۶۶۱)	۱/۱۰۱(۰/۰۰۹۴)
k_2	۰/۲۴۱۵(۰/۰۹۱۰)	۰/۷۰۴(۰/۰۰۴۳)
σ_1	۱/۸۴۲۲ (۰, ۴۹۰۰)	۰/۹۳۱۷ (۰/۰۰۵۸)
σ_2	۲,۱۱۹۹(۰/۹۸۰۰)	۳/۳۳۵۳ (۰/۳۶۹۸)
$\sigma_{\delta 1}$	۶/۳۳۳۹(۱/۰۵۲۰)	۷/۴۷۶۴ (۰/۰۳۲۶)
$\sigma_{\delta 2}$	۱/۸۶۵۱(۱/۰۰۰۰)	۳,۲۵۶۰(۰,۰۱۵۵)
ρ_{12}	۱۴/۶۷۴۲ (۵/۴۲۱۱)	۰,۶۶۴۳ (۰,۰۰۰۲)
$\rho_{1\delta_1}$	۰/۲۹۹۵(۰/۱۲۸۰)	۰/۰۳۴۵ (۰/۰۱۶۳)
$\rho_{1\delta_2}$	۰/۲۹۸۵ (۰/۷۶۰۱)	-۰/۰۲۰۶ (۰/۰۷۴)
$\rho_{2\delta_1}$	-۰/۲۵۹۱ (۱/۱۲۰۰)	-۰/۲۳۸۶ (۰/۰۰۲۰)
$\rho_{2\delta_2}$	۰/۵۱۹۹(۰/۰۷۱۰)	۰/۵۸۴۸ (۰/۰۰۵۷)
$\rho_{\delta_1\delta_2}$	۰/۵۷۸۴(۰/۰۰۰۱)	۰/۰۰۱۶ (۰/۰۰۰۰)
$\widehat{\alpha}_1$	۰/۵۸۶۵ (۰/۵۱۴۰)	۱/۰۲۲۱ (۰/۰۰۰۱)
$\widehat{\alpha}_2$	-۱/۲۸۰۸(۱/۰۳۰۰)	۰/۴۵۰۳ (۰/۰۰۰۱)
ω_1	-۰/۶۷۷۰ (۰/۸۰۴۱)	۰,۲۰۴۴(۰,۰۰۰۱)
ω_2	۰/۸۶۵۱ (۰/۲۰۱۹)	-۰/۹۹۸۲(۰/۰۰۰۱)
ω_{δ_1}	۱/۱۲۴۲ (۰/۰۰۱۰)	۶/۹۹۲۱ (۰/۰۰۶۶)
ω_{δ_2}	-۰/۰۱۹۱(۰/۰۵۰۰)	۱۰/۷۰۴۳(۰/۰۱۰۵)
a_1	-	-۰/۹۷۹۵ (۰/۶۴۹۱)
b_1	-	-۰/۰۲۹۸(۰/۰۰۹۳۷)
a_2	-	۵/۰۰۷۰(۰/۰۲۱۸)
b_2	-	-۰/۶۹۰۷(۰/۰۲۵۳)
a_0	-	۰/۷۰۵۰(۰/۰۰۰۱)

۱- در صورت نیاز به کدهای مطلب با نویسندگان مقاله تماس بگیرید

۲- تعدادی از پارامترها از قبیل واریانس معادله‌ی اندازه‌گیری و ...گزارش نشدند.

منبع: محاسبات تحقیق

جدول ۳- معیار برازش

معیارهای برازش	مدل پایه	مدل بسط‌یافته
	۳۰۰۰/۱۳۳۶۰	۳۱۰۰/۱۵۸۲۱
	۶۵۷۲/-۹۹	۱۲۷۰/-۱۲۶

منبع: محاسبات تحقیق

نتیجه گیری و پیشنهادات

از جدول (۲) مشاهده می‌شود که در مدل بسط‌یافته تمامی ضرایب به جز a_1 و $\rho_{1\delta_2}$ معنادار هستند. هم‌چنین از مقایسه‌ی دو مدل می‌توان دریافت که ضرایب بیش‌تری نسبت به مدل پایه معنادار می‌باشند.

در مدل پایه فقط اثرات کوتاه‌مدت در نظر گرفته شده است. و در مدل بسط‌یافته علاوه بر اثرات کوتاه‌مدت اثرات بلندمدت نیز منظور شده است. بر اساس تئوری ذخیره‌سازی[1] بازدهی آسایش بالا متناسب با قیمت نقدی بالاتر است[2]، بنابراین باید ضریب همبستگی میان دیفرانسیل جز وینر در معادلات دیفرانسیل تصادفی قیمت نقدی و بازدهی آسایش مثبت باشد. در مدل پایه و بسط‌یافته هر دوی $\rho_{1\delta_1}$ و $\rho_{2\delta_2}$ مثبت بوده و با تئوری سازگار می‌باشند. ρ_{12}[3] بیانگر اثرات کوتاه‌مدت قیمت گاز و نفت بر یکدیگر می‌باشد. این ضریب در هر دو مدل مثبت است، بنابراین تغییرات کوتاه‌مدت در قیمت نقدی یک کالا دارای اثر مثبت بر قیمت نقدی کالای دیگر است. شدت این ضریب در مدل پایه از مدل بسط‌یافته بیش‌تر می‌باشد. یک دلیل می‌تواند به اثرات هم‌حرکتی بلندمدت و کوتاه‌مدت در مدل بسط‌یافته مرتبط باشد. در هر دو مدل پارامترهای ضریب بستگی به جز ضریب $\rho_{1\delta_2}$ به لحاظ علامت یکسان می‌باشند. اما به لحاظ مقدار متفاوت می‌باشند.

در مدل بسط‌یافته علاوه بر هم حرکتی در کوتاه‌مدت، هم حرکتی در بلندمدت نیز در نظر گرفته شده است. برای هم‌حرکتی در بلندمدت دو ضریب b_i و بردار هم جمعی بلندمدت a_i وجود دارد. ضریب b_i بیانگر اثرات خطای بلندمدت ($e(t)$) بر انحراف قیمت

1- Storage Theory

۲- در صورتی که بازار به صورت تک کالایی در نظر گرفته شود.

۳- یا بیانگر هم حرکتی در کوتاه مدت است.

کالایی iام از سطح بلندمدتش می‌باشد، به عبارتی بیانگر اثرپذیری قیمت نقدی از رابطه‌ی خطی میان قیمت نقدی دو کالا می‌باشد. از آن‌جا که $|b_2| = 0.6907$ بزرگ‌تر از $|b_1| = 0.0298$ است، بنابراین اثرپذیری قیمت نقدی گاز از وجود رابطه‌ی خطی میان قیمت نقدی نفت و گاز طبیعی بیش‌تر از قیمت نفت است، بنابراین نوسانات در قیمت نقدی گاز طبیعی بیش‌تر از قیمت نقدی نفت‌خام است.

در معادلات دیفرانسیل تصادفی بازدهی آسایش، چون ضریب سرعت تعدیل k_1 از k_2 بیش‌تر است بنابراین بازدهی آسایش نفت سریع‌تر به سطح بلندمدت خود می‌رسد. در معادلات بازدهی آسایش، σ_{δ_2} بیش‌تر از σ_{δ_1} بیش‌تر است، بنابراین یک شوک مشترک به دو بازار در کوتاه‌مدت اثر بیش‌تری روی بازدهی آسایش گاز دارد.

در هر دو مدل پایه و بسط‌یافته واریانس قیمت نقدی گاز (σ_2) بیش‌تر از واریانس قیمت نقدی نفت‌خام (σ_1) است، بنابراین در هر دو مدل، تأثیرپذیری قیمت نقدی گاز طبیعی از شوک‌ها بیش‌تر از قیمت نقدی نفت‌خام است.

در معادله‌ی دیفرانسیل خطای بلندمدت ($e(t)$)، ضریب زمان معنادار است، بنابراین باید رانش زمان در نظر گرفته شود.

در جدول (۳) معیار آکاییک در مدل‌های پایه و بسط یافته به ترتیب ۹۹/۶۵۷۲- و ۱۲۶/۱۲۷۰ می‌باشد، که نشان می‌دهد مدل بسط یافته از کارایی بهتری نسبت به مدل پایه برخوردار است. بنابراین برای قیمت‌گذاری اختیارات واقعی در بازارهای انرژی (نفت و گازطبیعی) باید روابط بلندمدت نیز وارد شود.

برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود که فرض واریانس ثابت حذف و به جای آن از واریانس تصادفی استفاده شود تا مدل واقعی‌تر گردد، زیرا در بازه‌های زمانی متفاوت نوسانات قیمت گاز و نفت ثابت نیست.

فهرست منابع

Bachmeier, L., J., & Griffin, J., M., (2006), "Testing for market integration crude oil, coal, and natural gas", The Energy Journal 27, 55-71.

Stephen P., A., B., & Yucel, M., K., 2008, "What Drives Natural Gas Prices?," The Energy Journal, International Association for Energy Economics, Working Paper 0703. http://dallasfed. org/assets/documents/research/papers/2007/wp0703. pdf.

Casassus, J., & et al., (2010), "Long-term economic relationships and correlation structure in commodity markets", FinanceUC Working Paper Series No. 1, http://www. finance. uc. cl/working-papers?docid=3651

Cortazar, G. & Naranjo, L., (2006), " An N-factor Gaussian model of oil futures prices", Futures Markets 26, No. 3, 243–268.

Cortazar, G., & Schwartz, E., S., (2003), "Implementing a stochastic model for oil futures prices", Energy Economics. 25, No 3, 215–238

Dai, Q. & Singleton, K., J., (2000), "Specification analysis of affine term structuremodels" The Journal of Finance, 55, No. 5, 1943–1978.

Duan, J., C., & Pliska, S., R., (2004),"Option Valuation with Co-Integrated Asset Prices" Journal of Economic Dynamics & Control. 28, No. 4, 727–754

Gibson, R., & Schwartz, E., 1990. "Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims", Journal of Finance 45, 959–976.

Hagan, P., S., & et al. (2002), "Managing Smile Risk" Wilmott magazine, 84-108.

Hamilton, J., D., (1994). "Time Series Analysis", Princeton University Press, 820.

15-Hartley, P., R., & et al. (2008), "The relationship of natural gas to oil prices" The Energy Journal, 29,No. 3, 47-66.

Birge, J.,R., & Linetsky, V., (2008), "Financial Engineering", Elsevier,Vol 15.

Mohammadi, H., (20011), " Long-run relations & short-run dynamics among coal, natural gas & oil prices" , Journal Applied Economics 43,No. 2, 129-137

Ludkovski, M., & Carmona, R., (2004), "Spot Convenience Yield Models for EnergyMarkets", AMS Mathematics of Finance, G. Yin and Y. Zhang (eds.), vol. 351 Contemporary Mathematics, 65-80.

Schwartz, E., & Smith, J., E., (2000), "Short-term variations & long-term dynamics in commodity prices", Management Science, 46,No. 7, 893-911.

Westgaard, S., Estenstad, M., Seim, M., & Frydenberg, S., (2011), "Co-integration of ICE Gas oil and Crude oil futures". Energy Economics, 33,No. 2, 311-320.

Serletis, A., & Rangel-Ruiz, R. (2004). "Testing for common features in North American energy markets". Energy Economics, 26,No. 3, 401-414.

Villar, J., A., & Joutz, F., L., (2006), "The relationship between crude oil and natural gas prices", Energy Information Administration, Office of Oil and Gas.

Mishura, I. S., & Mishura, Y. (2008). "Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes" (Vol. 1929). Springer.

ضمیمه

A- فیلتر کالمن

فیلتر کالمن یک فرایند بازگشتی[1] برای تخمین متغیرهای غیرقابل مشاهده (حالت یا وضعیت)[2] است. در فیلتر کالمن خطای پیش بینی به‌دست می‌آورند. سپس از خطای پیش‌بینی و روش حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود تا پارامترهای مورد نظر تخمین زده شود.

در فیلتر کالمن دو نوع معادله وجود دارد. یک معادله، دینامیک مجموعه متغیرهای حالت را توضیح می‌دهدکه این معادله، با عنوان معادله‌ی انتقال[3] نام‌گذاری می‌شود. معادله‌ی دومی‌که متغیرهای غیر قابل مشاهده را به متغیرهای قابل مشاهده ربط می‌دهد معادله‌ی اندازه‌گیری[4] نامیده می‌شود. بنابر آن‌چه از ذهن گذشت متغیرهای نقدی و بازدهی آسایش به عنوان متغیرهای حالت و متغیر قیمت آتی به عنوان متغیر قابل مشاهده طبقه‌بندی می‌شوند، بنابراین در این مطالعه معادلات دیفرانسیل تصادفی برای بازدهی آسایش و قیمت نقدی با عنوان معادله‌ی انتقالی و رابطه‌ی بین قیمت آتی با قیمت نقدی با عنوان معادله‌ی اندازه‌گیری طبقه‌بندی می‌شوند.

در ادامه اگر فرض شود که $x(t)$ بیانگر متغیرهای غیرقابل مشاهده و $y(t)$ بیانگر بردار متغیرهای قابل مشاهده باشد، بنابراین معادله‌ی انتقالی و معادله‌ی اندازه‌گیری به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x_{t+1} = d_t + T_t x_t + \eta_t \qquad \text{(A-1a)}$$

$$y_t = C_t + Z_t x_t + \varepsilon_t \qquad \text{(A-1b)}$$

که d_t، T_t، C_t و Z_t بردار یا ماتریس پارامترهای معادلات انتقالی و اندازه‌گیری می‌باشند. η_t و ε_t نیز بیانگر جملات خطا در دو معادله هستند. که ماتریس واریان-کوواریانس عبارت است از:

$$E(\eta_t \eta_s) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{(A-2a)}$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = \begin{cases} R & \text{if } t = s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{(A-2b)}$$

1- Recursive

۲- این متغیرها تعین کننده‌ی حالت یا رفتار می‌باشند به این دلیل به آن‌ها متغیرهای وضعیت یا حالت می‌گویند

3- Transition

4- Measurement

هم‌چنین فرض می‌شود که η_t و ε_t فاقد همبستگی هستند (برای همه‌ی t و s باید داشته باشیم $E(\eta_t \varepsilon_s^{'}) = ۰$). بعد از معرفی خلاصه‌ای از فیلتر کالمن به بررسی الگوریتم فیلتر کالمن می‌پردازیم.

در الگوریتم فیلتر کالمن دو نوع متغیر به صورت بازگشتی استفاده می‌شوند که با عنوان متغیرهای priori و posteriori نام‌گذاری می‌شوند. مجموعه داده‌های مشاهده شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$$

در این صورت متغیرهای priori شامل میانگین شرطی و واریانس شرطی بر مبنای اطلاعات گذشته می‌باشند که به ترتیب صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{t|t-۱} = E(x_t | Y_{t-۱}) \qquad \text{(A-۳a)}$$

$$P_{t|t-۱} = var(x_t | Y_{t-۱}) \qquad \text{(A-۳b)}$$

مشاهده می‌شود متغیرهای priori بر مبنای اطلاعات گذشته متغیر قابل مشاهده تعریف می‌شوند.

متغیرهای posteriori شامل تخمین میانگین و واریانس بردارهای حالت مشروط به اطلاعات موجود یعنی در زمان t می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$x_{t|t} = E(x_t | Y_t) \qquad \text{(A-۴a)}$$

$$P_{t|t} = var(x_t | Y_t) \qquad \text{(A-۴a)}$$

بنابراین مرحله‌ی اول در فیلتر کالمن، محاسبه متغیرهای priori یعنی $x_{t|t-۱}$ و $P_{t|t-۱}$ با توجه به تمامی‌اطلاعات در زمان $t-۱$ می‌باشد. در این صورت داریم:

$$x_{t|t-۱} = d_{t-۱} + T_{t-۱} x_{t-۱|t-۱} \qquad \text{(A-۵a)}$$

$$P_{t|t-۱} = T_{t-۱} P_{t-۱|t-۱} T_{t-۱}^{'} + var(\eta) \qquad \text{(A-۵b)}$$

$$var(\eta) = Q \qquad \text{(A-۵c)}$$

در مرحله‌ی بعدی با مشاهده ی y_t، متغیرهای posteriori با استفاده از معادله‌های به هنگام کننده[1] در زمان t به هنگام می‌شوند. که این معادلات عبارتند از:

$$x_{t|t} = x_{t-۱|t-۱} + K_t v_t \qquad \text{(A-۶a)}$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-۱} - P_{t|t-۱} Z_t^{'} K_t^{'} \qquad \text{(A-۶b)}$$

1- Updating

که:

$$v_t = y_t - Z_t x'_{t|t-1} \qquad (A-7a)$$

$$F_t = var(v_t) = Z_t P_{t|t-1} Z'_t + var(\varepsilon) \qquad (A-7b)$$

$$K_t = P_{t|t-1} Z'_t F_t^{-1} \qquad (A-7c)$$

که v_t در معادله‌ی $(A-7a)$ خطای معادله‌ی اندازه‌گیری یا خطای پیش‌بینی است. F_t واریانس خطای پیش بینی است K_t بازدهی کالمن[1] است. این فرایند یا الگوریتم فوق تا آخرین مشاهده Y_t تکرار می‌شود. بعد از این مرحله، از خطای پیش‌بینی برای تخمین پارامترهای ناشناخته سیستم معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده می‌شود. برای این منظور از روش حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود. بنابراین تابع لگاریتم روش حداکثر درستنمایی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Ln(L(\vartheta)) = \sum_{t+1}^{N} Ln(f(v_t)) = c - \frac{1}{2}\sum_{t+1}^{N} Ln(|F_t|) - \frac{1}{2}\sum_{t+1}^{N} v'_t F_t^{-1} v_t \qquad (A-8)$$

که ϑ بردار پارامترهای ناشناخته دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی، v_t خطای پیش‌بینی، c مقدار ثابت معادل $-\frac{N}{2}Ln(2\pi)$، $|F_t|$ دترمینان ماتریس خطای پیش‌بینی و $f(v_t)$ تابع چگالی احتمال خطای پیش‌بینی می‌باشد. بنابراین پارامترها از حداکثر سازی $Ln(L(\vartheta))$ نسبت به بردار پارامتر ϑ به‌دست می‌اید.

$$\vartheta \in \arg\max_{\vartheta}(Ln(L(\vartheta)))$$

1- Kalman Gain