فصل‌نامه مطالعات اقتصاد انرژی/ سال پانزدهم / شماره ۶۳/ زمستان ۱۳۹۸/ صفحات ۲۶۷-۲۴۳

توسعه مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز کشور[۱]

شهران شفیعی
کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران،
Shahran.shafiei@gmail.com

وحید برادران[۲]
استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران،
v_baradaran@iau-tnb.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۱۰

چکیده

پیش‌بینی دقیق مصرف سالیانه گاز کل کشور نقش تعیین‌کننده‌ای در تدوین راهبردهای تأمین انرژی و سیاست‌گذاری این حوزه دارد. مدل رگرسیون زنجیره مارکف خاکستری روشی مبتنی بر داده‌های سری‌های زمانی است که عملکرد مناسبی جهت تحلیل و پیش‌بینی داده‌های مصرف سالیانه گاز دارد. رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری، ترکیبی از مدل زنجیره مارکوف و مدل رگرسیون خاکستری و ابزار مناسبی برای پیش‌بینی داده‌های تعداد کم با نوسانات تصادفی است. در این مدل، خطاهای پیش‌بینی حاصل از مدل رگرسیون خاکستری به تعدادی بازه با فواصل یکسان تقسیم و از میانگین بازه خطاها و ماتریس احتمال انتقال وضعیت زنجیره مارکوف مربوط به وضعیت خطاها، مقدار اصلاح‌شده خطا محاسبه و به مقدار پیش‌بینی مدل رگرسیون خاکستری اضافه می‌شود. در این تحقیق پیشنهاد می‌شود که به‌جای استفاده از میانگین فواصل، خطای هر بازه به‌صورت عدد خاکستری بین حدود هر بازه به نحوی انتخاب شود که معیار دقت پیش‌بینی کمینه شود. به‌منظور تعیین نقطه بهینه فواصل خطا، از رویکرد طراحی آزمایش‌ها و طرح باکس-بنکن استفاده شده است. مطالعه کاربردی پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز نشان می‌دهد که مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهبودیافته، دقت بیشتری نسبت به مدل‌های خاکستری، رگرسیون خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری دارد.

طبقه‌بندی JEL: C15,C53,C90,L95

کلیدواژه‌ها: مدل خاکستری، رگرسیون خاکستری، زنجیره مارکوف، طراحی آزمایش‌ها

---

۱ . این مطالعه در قالب طرح تحقیقاتی مصوب و با حمایت مالی شرکت ملی گاز ایران (شماره قرارداد ۹۷۴۰۱۵) انجام شده است. نگارندگان بر خود لازم می‌دانند مراتب تشکر صمیمانه خود را از مدیریت پژوهش و فناوری و مدیریت برنامه‌ریزی تلفیقی شرکت ملی گاز ایران که ما را در انجام این پژوهش یاری دادند، اعلام کنند.

۲. نویسنده مسئول

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

۱- مقدمه

ایران با داشتن حدود ۳۳/۶ تریلیون مترمکعب ذخایر اثبات‌شده (یعنی برابر ۱۸ درصد کل ذخایر گاز دنیا) به‌عنوان اولین کشور دارنده ذخایر گازی در جهان شناخته شده است (ناجی میدانی و رحیمی، ۱۳۹۴). این در حالی است که از نظر مصرف رتبه چهارم را به خود اختصاص داده است که این امر نشان از مصرف بالای گاز در کشور دارد. سهم بیش از ۷۰ درصدی گازطبیعی در سبد انرژی کشور، رشد سریع مصرف گازطبیعی در بازار جهانی در سال‌های اخیر و نقش مؤثر گاز به‌عنوان سوخت پاک در توسعه فعالیت‌های اقتصادی و افزایش رفاه اجتماعی کشور، اهمیت روزافزون این منبع انرژی را به‌عنوان محور توسعه نشان می‌دهد. مطالعه اعظمی و همکاران (۱۳۹۷) پیرامون رابطه مصرف گاز و رشد اقتصادی در یازده کشور صادرکننده گازطبیعی نشان می‌دهد که میزان مصرف گازطبیعی به‌طور مثبتی بر رشد اقتصادی این کشورها تأثیر می‌گذارد. از طرفی بررسی‌ها نشان می‌دهد که در بین انرژی‌های اولیه، مصرف گازطبیعی در سال‌های آینده بیشترین رشد را خواهد داشت و این رشد برای کشورهای در حال توسعه بیشتر خواهد بود، به‌طوری‌که تا سال ۲۰۲۰ سهم گازطبیعی از ترکیب انرژی جهان هر سال ۲ درصد افزایش می‌یابد (فطرس و همکاران، ۱۳۹۶). اما با توجه به محدود بودن منابع و به‌منظور پیشگیری از مواجه شدن با بحران در آینده، لزوم مدیریت صحیح تولید و مصرف گازطبیعی از اهمیت بالایی برخوردار است. پیش‌بینی مصرف گازطبیعی، نقش قابل ملاحظه‌ای در تعیین خط‌مشی انرژی و یکی از ابزارهای قوی تصمیم‌گیرندگان در جهت برنامه‌ریزی صحیح، هدایت مصرف و کنترل پارامترهای عرضه و تقاضای انرژی می‌باشد. به دلیل مؤلفه‌های مختلف تأثیرگذار بر روند مصرف انرژی و نوسانات بالای مربوط به آن، لزوم بهره‌گیری از یک مدل کارا و دقیق جهت پیش‌بینی تقاضای مصرف گاز در کشور بیش از پیش احساس می‌شود. بنابراین توسعه روش‌هایی برای پیش‌بینی دقیق مصرف سالیانه گاز در کشور که کاملاً منطبق با ویژگی‌های رفتار کمی و کیفی داده‌های مصرف باشد، ضرورت دارد. پیشنهاد این پژوهش برای پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز و کاهش نوسانات داده‌های آن استفاده از مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری[1] است. در این مقاله، ضمن توسعه‌ای بر بهبود

1. Marcov Chain Grey Regression Model

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری، از آن برای پیش‌بینی دقیق‌تر میزان مصرف سالیانه گاز در کشور استفاده شده است.

مدل خاکستری[1] در سال ۱۹۸۲ اولین بار توسط پرفسور دنگ[2] بر مبنای تئوری سیستم خاکستری معرفی شد و از آن برای پیش‌بینی روند سیستم‌های نامطمئن با تعداد داده‌های مشاهده شده کم، کارا استفاده می‌شود (سان[3] و همکاران، ۲۰۱۵). مدل خاکستری یک متغیره مرتبه یک یا به اختصار GM(1,1)، معروف‌ترین و محبوب‌ترین مدل مبتنی بر این تئوری است که می‌تواند در پیش‌بینی کوتاه‌مدت مبتنی بر مسائل نامعلوم با داده‌های گسسته و کم مورد استفاده قرار گیرد (هوسو[4]، ۲۰۰۳). این مدل، یک سری زمانی پرکاربرد در پیش‌بینی است که در معادله دیفرانسیل استفاده شده در آن از ضرایب متغیر زمانی بهره گرفته شده است. علیرغم مزیت‌های استفاده از مدل GM(1,1)، نظیر سادگی درک و فهم مدل و آسان بودن اجرای آن، استفاده از مدل فوق برای داده‌هایی که نوسانات[5] بالایی دارند، تأثیرات ناخوشایندی از منظر منحنی برازش در پی خواهد داشت (چنگ سو[6] و وو، ۱۹۹۷). یکی از توسعه‌های این مدل به‌منظور افزایش دقت پیش‌بینی، مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری یک متغیره مرتبه یک یا به اختصار MC-RGM(1,1)[7] است که از ترکیب دو مدل پیش‌بینی خاکستری یک متغیره مرتبه یک بهبودیافته و روش‌های رگرسیون و مارکوف حاصل شده است. به جهت رویکرد اصلاحی بر روی خطای باقیمانده‌ها، این روش می‌تواند تحلیل آماری بهتری برای داده‌های کم، بی‌ثبات و داده‌هایی که نوسانات معناداری دارند، حاصل کند (هوسو و همکاران، ۲۰۰۹؛ هوسو، ۲۰۰۳؛ کومار[8] و جین، ۲۰۱۰؛ مائو ژان لی[9] و همکاران، ۲۰۱۱؛ زی[10] و همکاران، ۲۰۱۵). به دلیل طبیعت غیرخطی و تعداد کم داده‌های مصرف گازطبیعی، استفاده از مدل‌های ترکیبی مارکوف خاکستری نتایج

1. Grey Model (GM)
2. Deng
3. Xu Sun
4. Hsu
5. Fluctuation
6. Cheng Hsu
7. Markov Chain Regression Grey Model
8. Kumar
9. MAO Zhan-li
10. Xie

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

دقیق‌تری حاصل خواهد کرد. (مصطفایی[1] و کردنوری، ۲۰۱۲؛ جانگ جو[2] و ویگو وانـگ، ۲۰۱۰). با توجه به تصادفی بودن داده‌ها، تعیین نقطه بهینه بازه خطاها موجـب تعریـف ضرایبی در این مدل‌ها می‌شود که تعیین تـابع هـدف معیـار خطـای ارزیـابی، مسـتلزم محاسبات دستی و پیچیده‌ای می‌شوند. تاکنون مطالعات زیادی در جهت بهبـود کـارایی مدل زنجیره مارکوف خاکستری انجـام گرفتـه اسـت. بیشـتر ایـن تحقیقـات در زمینـه افزایش دقت و کارایی مدل مارکوف خاکستری، معطوف به استفاده از مدل‌های کمکی و ترکیبی نظیر مدل مارکوف خاکستری مبتنی بر تبدیل موجک، مدل مارکوف خاکستری بهبودیافته با تقریب تیلور، مارکوف فوریه خاکستری و ... بوده که با روش‌هـای ریاضـی و محاسبات پیچیده آماری و بهره‌گیری از الگوریتم‌هـای ابتکـاری یـا فرابتکـاری سـعی در بهینه‌سازی پارامترهای مدل و افزایش دقت مدل داشته‌اند. کارایی مدل‌های پـیش‌بینـی به‌اندازه خطای حاصله از پیاده‌سازی مدل بستگی دارد. در محاسبات اصـلاحی خطاهـای مدل سنتی رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری، از مقدار میانگین بازه خطاها به‌عنـوان نماینده فواصل بازه خطاها استفاده می‌گردد ولی چنانچه به‌جای استفاده از حد میانگین، بردار خطاها را به‌صورت عدد خاکستری تعریف نماییم آنگاه تعیـین ضـابطه تـابع معیـار خطای مدل و یافتن جواب بهینه، مشکل بوده، بـالاخص بـه دلیـل طبیعـت تصـادفی و تغییر داده‌های مصرف گاز بعضاً مستلزم محاسـبات دسـتی و پیچیـده و صـرف زمـان و هزینه بالا می‌باشد. در این تحقیق برای اولین با بهره‌گیری از رویکرد طراحی آزمایش‌هـا و روش رویه پاسخ (RSM[3])، ضمن پرهیز از محاسبات پیچیده فوق‌الذکر، سـعی در بـالا بردن دقت مدل پیش‌بینی شده است. رویکرد فوق به‌عنوان تکنیکی سریع و با دقت قابل قبول نسبت به روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی، به‌منظـور تعیـین مقـدار بهینـه ضـرایب استفاده شده است، بنابراین ضمن ارائه رویکردی جدید برای تنظـیم بهینـه پارامترهـای مدل‌های خاکستری، برای نخستین بار از این مدل، برای پیش‌بینی دقیق میزان مصـرف گاز در کشور استفاده شده است.

1. Mostafaei
2. Gang Xu
3. Response Surface Methodology

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

۲- ادبیات موضوع

در این بخش ادبیات نظری تحقیق شامل مدل‌های خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و پیشینه تحقیق به‌طور مختصر مرور می‌شوند.

مدل GM(1,1) و رگرسیون خاکستری

مبنای توسعه سیستم‌ها و مدل‌های خاکستری، اعداد خاکستری‌اند (دنگ، ۱۹۸۲). عدد خاکستری $\otimes Xg$ عددی است که با حد بالا و پایین مشخص که به‌صورت $\otimes X_g = [X_d, X_u]$ بیان می‌شود. هر عدد خاکستری را می‌توان با ضریب سفیدسازی α مطابق رابطه (۱) به یک عدد قطعی (X_g) تبدیل کرد.

$$Xg=\alpha \times X_d + (1-\alpha) \times X_u \ , \quad 0 \le \alpha \le 1 \qquad (۱)$$

سری زمانی بردار $\mathbf{x^{(0)}}$ را شامل n مشاهده غیرمنفی به‌صورت $\mathbf{x^{(0)}}= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2),\ldots, x^{(0)}(n))$ در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{x^{(0)}(m)}$ مقادیر مشاهده‌شده متغیر پیش‌بینی در دوره زمانی m است به‌طوری‌که m=1, 2,…,n است. در مدل خاکستری یک متغیره مرتبه یک یا GM(1,1)، مراحل زیر بر داده‌های اولیه انجام می‌شود.

ابتدا عملگر تولید تجمعی[1] (AGO) مطابق رابطه (۲) بر روی داده‌های اولیه $\mathbf{x^{(0)}}$ پیاده می‌شود تا سری زمانی $\mathbf{x^{(1)}}= (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2),\ldots, x^{(1)}(n))$ حاصل شود. سری زمانی جدید $\mathbf{x^{(1)}}$ کمی منظم‌تر از سری $x^{(0)}$ است و تصادفی‌بودن داده‌ها در آن کاهش یافته است.

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(0)}(m) \ , \quad k = ۱,۲ \ldots, n \qquad (۲)$$

جهت هموارسازی بیشتر داده‌ها، سری میانگین جدید $\mathbf{z^{(1)}} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \ldots, z^{(1)}(n))$ تشکیل می‌شود که در آن $z^{(1)}(k)$، میانگین حسابی دو مقدار $x^{(1)}(k)$ و $x^{(1)}(k-1)$ مطابق رابطه (۳) است.

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)) \ \text{و} \ k=۱, ۲\ldots, n \qquad (۳)$$

مدل GM(1,1) بر اساس یک معادله دیفرانسیل خاکستری درجه اول مطابق رابطه (۴) تعیین می‌شود.

1. Accumulated Generating Operation

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \qquad (۴)$$

در رابطه (۴)، چنانچه واحد زمانی یک فرض شود (یک روز، یک ماه یا یک سال) $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ برابر خواهد شد با $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)$ که این مقدار همان $x^{(0)}(k)$ است و پس از جایگذاری و ساده‌سازی $x^{(1)}$ با متوسط وزنی $x^{(1)}(k)$ و $x^{(1)}(k-1)$، رابطه (۵) حاصل می‌شود (سان و همکاران، ۲۰۱۵).

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad , \quad k = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۵)$$

$z^1(k)$ مقدار سابقه یا زمینه[1] مقدار $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ و پارامترهای a و b به ترتیب ضریب توسعه[2] و مقدار عمل خاکستری[3] نامیده می‌شوند (سان و همکاران، ۲۰۱۵). از رابطه (۶) می‌توان پارامترهای a و b را به روش تخمین حداقل مربعات[4] (LSE) تخمین زد.

$$[a \;\; b]^T = \left(B^T B\right)^{-1} B^T Y_n \quad , \quad k = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۶)$$

که در آن ماتریس B به‌صورت (۷) و Y_n ترانهاده بردار داده‌های اولیه یا $Y_n = (x^{(0)}(1)\, x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\,)^T$ است.

$$B = \begin{bmatrix} -z^1(1) & 1 \\ -z^1(2) & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -z^1(n) & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

از طرفی با حل معادله دیفرانسیل (۴)، مقدار $x^{(1)}(t)$، برابر با رابطه (۸) می‌شود.

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a} \quad , \quad t = ۱, ۲, \dots, \qquad (۸)$$

حال با استفاده از عملگر معکوس تولید تجمعی[5] (IAGO) که در رابطه (۹) مشخص شده، معادله نهایی مدل پیش‌بینی خاکستری (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$x^{(0)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(1)}(t-1) \quad , \quad t = ۱, ۲, \dots, \qquad (۹)$$

رابطه (۱۰) رابطه نهایی پیش‌بینی به روش مدل خاکستری است که در آن $x^{(0)}(0)$ اولین مقدار مشاهده در سری زمانی داده‌های اولیه است و ضرایب a و b از رابطه (۶)

1. background
2. development coefficient
3. grey action quantity
4. Least Square Estimation
5. inverse accumulated generating operation

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

برآورد شده‌اند. با جایگذاری مقدار t در رابطه ذیل، مقدار پیش‌بینی دوره مربوطه محاسبه می‌شود.

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \left(x^{(0)}(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at}(1 - e^{a}) \quad , \quad t = ۱, ۲, ..., \qquad (۱۰)$$

از آنجا که عموماً مدل‌های GM(1,1) دارای خطا هستند، برای تصحیح مقدار خطای پیش‌بینی و کاهش فواصل مقادیر پیش‌بینی و مقادیر واقعی و با هدف افزایش کارایی مدل، از مدل‌های رگرسیونی استفاده می‌شود. در این مدل، پس از برآورد هر یک از مشاهدات به روش GM(1,1)، مدل رگرسیون خطی مطابق (۱۱) بین مقادیر پیش‌بینی به روش مدل خاکستری ($\hat{x}^{(0)}(t)$) و مقادیر واقعی مشاهدات ($x^{(0)}(t)$) به ازای مشاهدات آموزش تشکیل می‌شود. در مدل رگرسیون خطی (۱۱)، y_i و x_i به ترتیب مقادیر واقعی مشاهدات و مقادیر پیش‌بینی به روش مدل خاکستری می‌باشند. پارامترهای β_0 و β_1 با استفاده از روش حداقل مربع خطا در رگرسیون برآورد می‌شوند. پس از آنکه مقدار مشاهده جدیدی ($\hat{x}^{(0)}(t) | t = n + k; k \geq 1$) با رابطه (۱۰) پیش‌بینی شد، مقدار اصلاح‌شده پیش‌بینی با رابطه (۱۱) به‌عنوان مقدار پیش‌بینی نهایی ($\hat{\hat{x}}^{(0)}(t)$) محاسبه می‌شود. این رویکرد به مدل رگرسیون خاکستری (RGM[1]) معروف است.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \qquad (۱۱)$$

مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری

مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری یا MC-RGM(1,1) ترکیبی از دو مدل رگرسیون خاکستری و مدل زنجیره مارکوف برای پیش‌بینی داده‌های کم با نوسانات و تغییرات تصادفی بالا توسعه یافته است. در این روش مقدار خطا (باقیمانده)های مدل RGM(1,1) تبدیل به مقادیر گسسته (بازه‌هایی برابر) شده و در قالب یک زنجیره مارکوف مدل‌سازی می‌شوند. با استفاده از خاصیت مارکوفی مقادیر خطا و محاسبه احتمال رخداد خطاها به ازای یک مقدار پیش‌بینی، مقدار پیش‌بینی مدل RGM(1,1) اصلاح می‌شود.

1. Regresion Grey Model

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

در مرحله نخست، از اختلاف مقدار هر مشاهده آموزش ($x^{(0)}(t)$) و مقدار پیش‌بینی با مدل RGM(1,1)، ($\hat{\hat{x}}^{(0)}(t)$)، مقدار خطای مربوطه طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$e(t) = x^{(0)}(t) - \hat{\hat{x}}^{(0)}(t), \quad t = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۱۲)$$

بازه حداقل و حداکثر خطاها (R) به r بازه مساوی تقسیم می‌شود که $R = [\min e(t), \max e(t)]$. تعداد بازه‌ها (r) برابر بخش عدد صحیح $\frac{\ln(n)}{\ln 2}$ در نظر گرفته می‌شود. هر یک از بازه‌ها را می‌توان یک فاصله خاکستری فرض کرد که توسط عدد خاکستری ($\otimes s_j$) تعریف می‌گردد که در رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

$$\otimes s_j = [L_j, U_j], \qquad j = ۱, ۲, \dots, r \qquad (۱۳)$$

حد بالا و پایین هر وضعیت j مطابق معادلات (۱۴) به‌دست خواهد آمد.

$$\begin{cases} L_j = \min_t e(t) + \frac{j-1}{r}\left(\max_t e(t) - \min_t e(t)\right) \\ U_j = \min_t e(t) + \frac{j}{r}\left(\max_t e(t) - \min_t e(t)\right) \end{cases} \qquad (۱۴)$$

بر اساس وضعیت خطاها، ماتریس مربعی گذار مرحله m مطابق (۱۶) تشکیل می‌شود که درآیه‌های آن احتمال گذار از یک وضعیت خطا به وضعیت دیگر در پیش‌بینی m دوره بعدی است.

$$P^{(m)} = \begin{bmatrix} P_{11}^m & \cdots & P_{1r}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1}^m & \cdots & P_{rr}^m \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

تابع احتمال درآیه‌های ماتریس گذار، P_{ij}^m، یعنی احتمال انتقال از وضعیت i به j پس از m مرحله یا دوره پیش‌بینی را به‌صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود.

$$P_{ij}^m = \frac{M_{ij}^m}{M_i}, \quad j = ۱, ۲, \dots, r \qquad (۱۶)$$

M_{ij}^m تعداد دفعات انتقال اتفاق افتاده از وضعیت i به وضعیت j تحت m مرحله و M_i تعداد داده‌هایی است که خطاهای مربوطه در وضعیت i قرار گرفته است. بردار افقی سطر iام در ماتریس (۱۵) یا $\mathbf{a}_{j(i)}^{\mathbf{m}} = (p_{i1}^m, p_{i2}^m, \dots, p_{ir}^m)$ را در نظر بگیرید. هر یک از بردار افقی این ماتریس (p_{ij}^m) بیانگر این مطلب است که اگر خطای دوره‌ای در بازه s_i قرار گیرد، خطایی به اندازه بازه s_j با احتمال p_{ij}^m به پیش‌بینی m دوره بعد آن اضافه یا کم می‌شود. از آنجا که مقدار خطای s_j به‌صورت بازه است، به‌طور قراردادی میانگین حد بالا و پایین بازه مربوطه به‌عنوان مقدار اصلاحی در نظر گرفته می‌شود. به‌منظور انجام

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

این رویه، بردار وضعیت خطاها را به‌صورت $\mathbf{V} = (v(1), v(2), \dots, v(r))$ تعریف می‌شود که به ازای هر وضعیت j مقدار $v(j)$ از رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$v(j) = \alpha_j L_j + (1 - \alpha_j)\, U_j \quad j = ۱, ۲, \dots, r \qquad (۱۷)$$

مقدار خطایی که باید به مقدار پیش‌بینی m دوره بعدی روش RGM(1,1) یا $\hat{\tilde{x}}^{(0)}(i + m)$ اضافه شود از حاصل‌ضرب بردار افقی ماتریس توان m احتمال مربوط به آن وضعیت در ترانهاده بردار وضعیت خطاها و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\hat{e}_r\,(t + m) = (a_r)^m (V)^T\ , \qquad t = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۱۸)$$

درصورتی‌که فرض کنیم خطای پیش‌بینی دوره t تنها بر یک دوره بعدی اثرگذار باشد و مقدار اصلاحی تنها تحت تأثیر مقدار خطای یک دوره قبلی باشد یا به عبارتی m=1 آنگاه مقدار پیش‌بینی حاصل از مدل تصحیح یافته مارکوف ($\tilde{x}^{(0)}(t)$) به‌صورت ذیل تعریف می‌شود.

$$\tilde{x}^{(0)}(t + 1) = \hat{e}_r\,(t + 1) + \hat{\tilde{x}}^{(0)}(t + 1), \qquad t = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۱۹)$$

که $\hat{e}_r\,(t + 1)$ در معادله (۱۹) در واقع مقدار اصلاحی مارکوف و $\hat{\tilde{x}}^{(0)}(t + 1)$ و $\tilde{x}^{(0)}(t + 1)$ به ترتیب مقادیر پیش‌بینی حاصل از مدل رگرسیون خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری است.

پیشینه تحقیق

در گذشته مسأله پیش‌بینی مصرف انرژی و به تبع آن گازطبیعی مورد توجه محققین بسیاری بوده است. سبالج و همکاران[1] (۲۰۱۷) به بررسی اجمالی و تجزیه و تحلیل سیستماتیک آخرین مقالات و تحقیقات صورت گرفته در زمینه پیش‌بینی مصرف گازطبیعی از سال ۲۰۰۴ تا ۲۰۱۷ پرداخته‌اند. روش‌های این تحقیقات از نظر افق زمانی به سه دسته کوتاه‌مدت (ساعتی، روزانه)، میان‌مدت (هفتگی یا ماهانه) و بلندمدت (سالانه) و از منظر حوزه پیش‌بینی نیز به چهار حوزه کشوری، منطقه‌ای، شهری و خانگی تقسیم شدند. در جدول ۱ به‌طور خلاصه، مهم‌ترین تحقیقات این حوزه به تفکیک روش به‌کار رفته، افق زمانی و حوزه پیش‌بینی از سال ۲۰۰۴ تا ۲۰۱۷ ارائه شده است. بر اساس این جدول، مدل‌های شبکه عصبی متداول‌ترین و بیشترین روش

1. Sebalj et al.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

مورد استفاده محققان در پیش‌بینی مصرف گاز بوده همچنین افق پیش‌بینی روزانه و سالیانه و همچنین حوزه پیش‌بینی کشوری به ترتیب بیشترین تمرکز محققان را در برداشته است.

جدول ۱۱. مروری بر پیشینه تحقیق حوزه پیش‌بینی مصرف گاز

نوع مدل	حوزه پیش‌بینی				افق پیش‌بینی					
	کشور	منطقه	شهر	خانه	سال	فصل	ماه	هفته	روز	ساعت
شبکه عصبی	۲	۲	۴	۱	۱			۱	۳	۲
واسطه‌ای فازی مبتنی بر شبکه[1] (ANFIS)	۲							۱	۱	
پیش‌بینی خاکستری	۴				۴					
رگرسیون بردار پشتیبان[2] (SVR) و ماشین بردار پشتیبان[3] (SVM)	۲		۲	۱	۱				۳	
الگوریتم‌های ژنتیک	۱		۲		۱	۱	۲			
مدل‌های آماری و ریاضی	۴	۲	۲	۱	۳	۱		۱	۵	۱
سری‌های زمانی	۱	۲	۱				۱	۱	۲	
مدل‌های هیبریدی	۲						۱		۱	
سایر			۱							

منبع: سبالج و همکاران (۲۰۱۷)

علاوه بر تحقیقات ذکرشده درجدول ۱۱، در سال‌های اخیر پژوهش‌هایی جهت توسعه مدل زنجیره مارکوف خاکستری و یا استفاده از آن برای پیش‌بینی تقاضای انرژی انجام شده است. لی[4] و همکاران (۲۰۱۳) با ترکیب روش مارکوف خاکستری، مدل رگرسیون و روش تقریب تیلور، مدلی با عنوان "نسخه بهبود یافته روش مارکوف خاکستری" ارائه کردند و بر اساس داده‌های تولید برق حرارتی ۴۰ سال اخیر در ژاپن بهبود مدل را اعتبارسنجی کردند. سان و همکاران (۲۰۱۷) مدل مارکوف خاکستری مبتنی بر تبدیل موجک[1] را جهت حذف نویزهای مربوط به داده‌های اصلی ارائه نموده و

1. Adaptiv Network-based Fuzzy Interference System
2. Support Vector Regression
3. Support Vector Machine
4. Guo-Dong Li
1. Wavelet Transform

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

با استفاده از آن پیش‌بینی تولید و مصرف انرژی در چین را برای سال‌های ۲۰۱۵ تا ۲۰۲۰ انجام دادند. کاظمی[1] و همکاران (۲۰۱۲) پیش‌بینی تقاضای انرژی بخش حمل‌ونقل در ایران را با استفاده از مدل زنجیره مارکوف خاکستری انجام دادند. آنها نتایج پیش‌بینی را با مدل خاکستری و مدل رگرسیونی مقایسه کردند و همچنین تقاضای انرژی بخش حمل و نقل در ایران را تا سال ۱۴۰۰ با استفاده از مدل زنجیره مارکوف خاکستری پیش‌بینی و نشان دادند که مدل زنجیره مارکوف خاکستری دقت بالاتری از دو مدل خاکستری و مدل رگرسیونی دارد.

۳- روش تحقیق

جهت توسعه روش‌هایی برای پیش‌بینی مصرف سالانه گاز در کشور، داده‌های مصرف کل گاز ایران (مجموع مصارف خانگی، تجاری، صنایع عمده و نیروگاهی) طی سال‌های ۱۳۸۰ الی ۱۳۹۷ (۱۸ سال) از مجموعه گزارش‌های سالیانه عملکرد شرکت ملی گاز ایران مربوط به مدیریت برنامه‌ریزی تلفیقی شرکت ملی گاز گردآوری شد. به‌منظور ساخت مدل‌های پیش‌بینی و ارزیابی دقت آنها، داده‌ها به دو دسته داده‌های آموزش (داده‌های سال‌های ۱۳۸۰ الی ۱۳۹۴) و داده‌های آزمون (داده‌های ۱۳۹۵ الی ۱۳۹۷) تقسیم شده‌اند. داده‌های اولیه آموزش ($x^{(0)}(t)|\ t=۰, ۱, ..., ۱۵$) در جدول ۲ و کل مشاهدات اولیه در شکل ۱ نشان داده شده است. فرایند انجام پژوهش در شکل ۱ نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده، برای پیش‌بینی مصرف گاز از چهار روش مدل GM(1,1)، RGM(1,1)، MC-RGM(1,1) و مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهبودیافته (مدل بهینه‌شده تنظیم پارامترهای مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری) استفاده و در نهایت دقت مدل‌ها مذکور با داده‌های آموزش و آزمون بررسی شده‌اند.

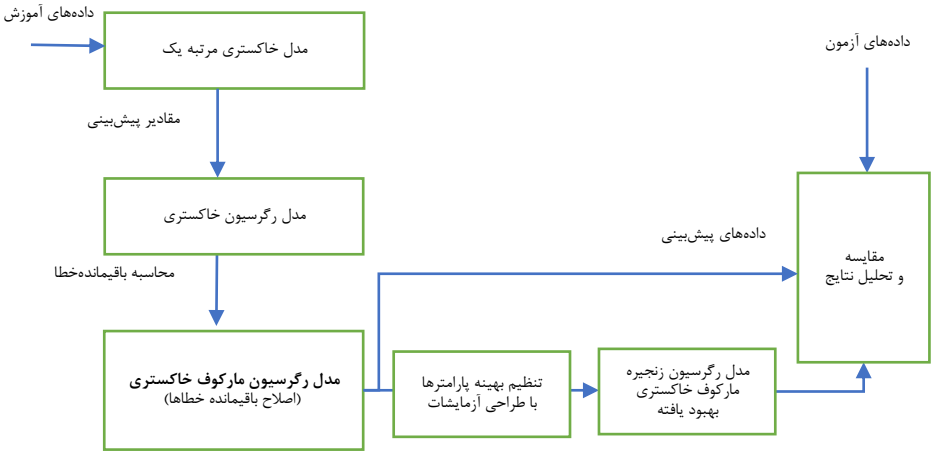
1. Kazemi

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

پیش‌بینی مدل خاکستری GM(1,1) و رگرسیون خاکستری RGM(1,1)

داده‌های ستون $x^{(0)}(t)$ در جدول را به‌عنوان داده‌های بردار $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2),\ldots, x^{(0)}(n))$ به ازای $n=15$ در مدل خاکستری GM(1,1) درنظر بگیرید. به کمک روابط (۲) و (۳) و داده‌های بردار $\boldsymbol{x}^{(0)}$ به ترتیب درآیه‌های بردارهای $\boldsymbol{x}^{(1)}$ و $\boldsymbol{z}^{(1)}$ محاسبه می‌شوند. به کمک رابطه (۶)، مقدار ضرایب a و b به ترتیب برابر ۰/۰۵۳۱۲۴۸- و ۸۴۱۰۰/۹۵۶ در مدل GM(1,1) برآورد شده‌اند. با استفاده از ضرایب برآورد شده و داده‌های آموزش ($x^{(0)}(t)$) و استفاده از رابطه (۱۰)، مقادیر پیش‌بینی هر دوره با مدل خاکستری GM(1,1) محاسبه و مقادیر مربوطه ($\hat{x}^{(0)}(t)$) در ستون سوم جدول ۲ درج شده است.

جهت کاهش مقدار خطا در مدل خاکستری، مدل رگرسیون خطی درجه اول بین داده‌های دو ستون $x^{(0)}(t)$ و $\hat{x}^{(0)}(t)$ بر اساس رویکرد مدل رگرسیون خاکستری رابطه (۱۱) تشکیل شده است. رابطه مذکور با بهره‌گیری از نرم‌افزار متلب و ضریب تعیین (R^2) برابر ۹۴/۲ درصد به شکل $x^{(0)}(t) = ۱۰۱۴ + ۹۹۳۵/۰\hat{x}^{(0)}(t)$ تعیین شده است. پس از جایگذاری مقادیر پیش‌بینی مدل خاکستری ($\hat{x}^{(0)}(t)$) در رابطه رگرسیونی، مقادیر پیش‌بینی به روش رگرسیون خاکستری محاسبه شده که در ستون $\hat{\hat{x}}^{(0)}(t)$ در جدول ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱. فرایند انجام تحقیق

منبع: یافته‌های تحقیق

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

پیش‌بینی مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری MC-RGM(1,1)

به‌طور مشابه، مراحل مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری که قبلاً تشریح شد را بر داده‌های آموزش در جدول ۲ اجرا شده است. در اولین مرحله مقادیر خطاها ($e(t)$) با رابطه (۱۲) و از اختلاف $\hat{\hat{x}}^{(0)}(t)$ و $x^{(0)}(t)$ حاصل می‌شود که نتایج محاسبات آن در جدول ۲ نشان داده شده است. با توجه به تعداد مشاهدات (n=15)، فاصله بیشینه و کمینه خطاها به سه بازه مساوی (r=۳) و بر اساس رابطه (۱۴) به شرح اعداد خاکستری زیر تقسیم می‌شوند. هر عدد خاکستری بیانگر یک وضعیت در زنجیره مارکوف است. وضعیت هر یک از خطاها در جدول ۲ مشخص شده است.

$$\otimes s_1 = [-10518.35578 \quad -3324.071507]$$
$$\otimes s_2 = [-3324.071507 \quad 3870.212766]$$
$$\otimes s_3 = [3870.212766 \quad 11064.49704]$$

اگر هر یک از اعداد خاکستری فوق بیانگر یک وضعیت خطا باشد، ماتریس احتمال گذار زنجیره مارکوف مربوطه در رابطه (۱۵)، به شرح زیر خواهد بود. درآیه‌های این ماتریس بر اساس رابطه (۱۶) و مقدار خطاها ($e(t)$) محاسبه شده است.

$$P = \begin{bmatrix} 0.666666667 & 0.333333333 & 0 \\ 0 & 0.333333333 & 0.666666667 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

در روش رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری، در رابطه (۱۷) عموماً از ضریب ۰/۵ (میانگین حد پایین و بالای اعداد خاکستری خطاها) برای سفیدسازی تمام اعداد خاکستری استفاده می‌شود. بردار مرکزی خطاها با استفاده از ضریب ۰/۵ برابر است با:

V = (۰۵۷۱/۶۸۸۵- , ۶۵۱۳/۲۲۸ , ۳۵۹۷/۷۳۴۲۱)

مقدار تعدیل و پیش‌بینی یک دوره بعد از هر دوره جاری با روابط (۱۸) و (۱۹) محاسبه شده و در جدول ۲ مقادیر پیش‌بینی مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری برای همه مشاهدات آزمایش، نشان داده شده است.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

جدول ۲. نتایج پیش‌بینی مدل‌های خاکستری، رگرسیون خاکستری و رگرسیون مارکوف خاکستری

سال	t	مقادیر واقعی $(x^{(0)}(t))$	مدل خاکستری $(\hat{x}^{(0)}(t))$	مدل رگرسیون خاکستری $(\hat{\hat{x}}^{(0)}(t))$	باقیمانده خطاها	وضعیت خطا	رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری $\tilde{x}^{(0)}(t)$ (به ازای α_j=۰/۵)	رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهینه
۱۳۸۰	۰	۹۰۳۲۰/۵	۸۶۵۷۹/۱۰	۸۷۰۲۷/۳۶۶	۳۲۹۳/۱۳	۲	۸۷۳۰۰/۴۳۶۷۳	۹۰۸۹۷.۵۷
۱۳۸۱	۱	۱۰۱۶۰۴/۲	۹۱۳۰۲/۹۷	۹۱۷۲۰/۳۵۶	۹۸۸۳/۸۴	۳	۹۶۷۸۹/۶۱۷۰۳	۱۰۰۳۸۶/۷
۱۳۸۲	۲	۸۸۵۱۶/۷۲	۹۶۲۸۴/۵۷	۹۶۶۶۹/۴۰۳	-	۱	۹۸۳۸۱/۳۳۰۶۹	۹۹۱۰۰/۷۵
۱۳۸۳	۳	۹۱۳۷۰/۱۲	۱۰۱۵۳۷/۹	۱۰۱۸۸۸/۴۷	-	۱	۹۷۳۶۵/۳۵۶۸۹	۹۶۱۶۶/۳۰
۱۳۸۴	۴	۹۷۷۱۱	۱۰۷۰۷۸/۰	۱۰۷۳۹۲/۳۰	-	۱	۱۰۲۸۶۹/۱۸۸۷	۱۰۱۶۷۰/۱
۱۳۸۵	۵	۱۰۹۱۰۶/۷	۱۱۲۹۲۰/۳	۱۱۳۱۹۶/۴۳	-	۱	۱۰۸۶۷۳/۳۱۶۶	۱۰۷۴۷۴/۲
۱۳۸۶	۶	/۸۲	۱۱۹۰۸۱/۴	۱۱۹۳۱۷/۲۴	۲۳۵۷/۵۷	۲	۱۱۴۷۹۴/۱۲۵	۱۱۳۵۹۵/۰
۱۳۸۷	۷	۱۳۲۶۵۰/۴	۱۲۵۵۷۸/۶	۱۲۵۷۷۲/۰۱	۶۸۷۸/۳۸	۳	۱۳۰۸۴۱/۲۷۱۶	۱۳۴۴۳۸/۴
۱۳۸۸	۸	/۰۱	۱۳۲۴۳۰/۳	۱۳۲۵۷۸/۹۵	۸۶۵۶/۰۵	۳	۱۳۴۲۹۰/۸۸۶۸	۱۳۵۰۱۰/۳
۱۳۸۹	۹	۱۵۰۸۲۱/۸	۱۳۹۶۵۵/۹	۱۳۹۷۵۷/۳۰	۱۱۰۶۴/۴	۳	۱۴۱۴۶۹/۲۳۰۴	۱۴۲۱۸۸/۶
۱۳۹۰	۱۰	/۱۵	۱۴۷۲۷۵/۷	۱۴۷۳۲۷/۳۰	۵۴۰۵/۸۴	۳	۱۴۹۰۳۹/۲۳۳۶	۱۴۹۷۵۸/۶
۱۳۹۱	۱۱	/۴۴	۱۵۵۳۱۱/۳	۱۵۵۳۱۰/۳۳	-	۱	۱۵۷۰۲۲/۲۶۵۷	۱۵۷۷۴۱/۶
۱۳۹۲	۱۲	/۶۱	۱۶۳۷۸۵/۳	۱۶۳۷۲۸/۹۳	-	۱	۱۵۹۲۰۵/۸۱۵۹	۱۵۸۰۰۶/۷
۱۳۹۳	۱۳	/۰۱	۱۷۲۷۲۱/۶	۱۷۲۶۰۶/۸۶	-	۲	۱۶۸۰۸۳/۷۴۱۸	۱۶۶۸۸۴/۶
۱۳۹۴	۱۴	۱۸۰۷۷۰	۱۸۲۱۴۵/۵	۱۸۱۹۶۹/۱۷	-	۲	۱۸۷۰۳۸/۴۳۷۶	۱۹۰۶۳۵/۵

منبع: یافته‌های تحقیق

۴- بهبود مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری

در رویکرد رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری برای اصلاح مقادیر پیش‌بینی حاصل از روش رگرسیون خاکستری با احتمالی که از ماتریس گذار مارکوف محاسبه می‌شود، میانگین خطا در هر وضعیت (با ضرایب α_j برابر با ۰/۵) به مقدار پیش‌بینی اضافه می‌شود. به نظر می‌رسد، انتخاب میانگین فواصل در اعداد خاکستری خطاها معیار مناسبی برای اصلاح مقادیر پیش‌بینی در رابطه (۱۸) نیست. استفاده صرف از مرکز وضعیت خطا موجب می‌شود سایر اطلاعات توزیع خطاها را نادیده گرفته شود و به

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

همین دلیل مرکز بردار خطاها نمی‌تواند نماینده مناسبی برای وضعیت خطاها باشد (سان و همکاران، ۲۰۱۵). الگوی منطقی برای انتخاب میانگین بازه‌ها وجود ندارد و مقدار ۰/۵ برای سفیدسازی بازه‌ها به‌صورت قراردادی است. در واقع مسئله این پژوهش تعیین مقدار بهینه متغیرهای α_j است به‌طوری‌که مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری برازش بهتری برای داده‌های آموزش انجام دهد. پیشنهاد این مقاله، تعیین مقادیر بهینه این پارامترها استفاده از رویکرد طراحی آزمایش‌ها[1] و رویه پاسخ است. طراحی آزمایشات یک رویکرد آماری برای بررسی اثر متغیرهایی مانند α_j ها بر رفتار متغیرهای پاسخ یا وابسته[2] است. در مسئله مذکور چنانچه r متغیر α_j در مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری، متغیر مؤثر بر میزان خطای پیش‌بینی (به‌عنوان متغیر پاسخ) درنظر گرفته شوند، رویکرد طراحی آزمایشات قادر خواهد بود اثر سطوح مختلف متغیرهای اثرگذار را بر متغیر پاسخ بررسی و مقدار بهینه‌ای برای آنها پیشنهاد نماید. در این روش، ابتدا هر یک از متغیرهای اثرگذار به تعدادی سطح (عموماً دو سطح حداقلی و حداکثری) تقسیم می‌شوند. هر یک از ترکیبات سطوح مختلف متغیرها یک آزمایش نامیده می‌شود. می‌توان پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز با مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری را به ازای سطوح مختلف آزمایش (منظور مقادیر مختلف آزمایش به‌ازای α_j) و اعمال ضرایب در رابطه (۱۷) انجام داده و مقدار خطای کل پیش‌بینی را (مانند میانگین انحراف مطلق یا میانگین درصد انحراف مطلق[3]) به‌عنوان متغیر پاسخ برای داده‌های آموزش محاسبه کرد. در واقع فضای جواب نامحدود برای تعیین ضرایب سفیدسازی با سطح‌بندی آنها و انجام آزمایش به ازای هر آزمایش، به فضای جواب محدودتر و گسسته محدود می‌شود. روش رویه پاسخ به دنبال برازش تابع متغیر پاسخ بر حسب متغیرهای اثرگذار و تعیین مقدار بهینه آنها برای کمینه یا بیشینه کردن متغیر پاسخ است.

هر یک از سه متغیر α_1 ، α_2 و α_3 در مطالعه موردی این پژوهش به سه سطح یک (بالاترین مقدار ممکن)، ۰/۵ (مقدار متوسط به‌عنوان مقدار میانی) و صفر (کمترین مقدار ممکن) تقسیم شده‌اند. به‌منظور طراحی آزمایش‌ها (ترکیب سطوح مختلف

1. Design of Expriment
2. Response or Dependent
3. Mean Absolute Percentage Error

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

متغیرها) از طرح باکس- بنکن[1] سه سطحی از جمله روش‌های تعیین آزمایش‌ها استفاده شده است. در صورت عدم استفاده از طرح باکس-بنکن با توجه به این که هر سه متغیر سه سطح دارند، در مجموع ۲۷=$۳^۳$ آزمایش قابل طرح است. اما استفاده از این طرح تعداد آزمایش‌های را به ۱۵ آزمایش کاهش می‌دهد.

به‌عنوان مثال یکی از ۱۵ آزمایش پیشنهادی، ترکیب ($\alpha_1 =$ ۱ ، $\alpha_2 =$ ۰.۵ و $\alpha_3 =$ ۰) بوده است. به ازای هر یک از آزمایش‌های پیشنهادی طرح باکس-بنکن، مدل پیش‌بینی رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بر داده‌های آموزشی اجرا شده و مقدار درصد انحراف مطلق (MAPE) مطابق (۲۰) به ازای هر آزمایش محاسبه شده است.

$$\text{MAPE}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{x^{(0)}(t)-\tilde{x}^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t)}\right|\times 100\ \% \qquad (۲۰)$$

از داده‌های اجرای ۱۵ آزمایش شامل سطوح سه متغیر اثرگذار و درصد انحراف مطلق پیش‌بینی به‌عنوان مقدار پاسخ هر آزمایش برای تشکیل رویه پاسخ یا معادله رگرسیونی MAPE و α_j استفاده می‌شود. در مدل باکس-بنکن امکان تشکیل یک مدل درجه دو کامل[2] به شکل رابطه (۲۱) وجود دارد که در آن علاوه بر اثرات متغیرهای اصلی (α_j)، مربع متغیرهای اصلی (α_j^2) اثرات برهمکنش‌های[3] دوتایی ($\alpha_i \times \alpha_j$) متغیرهای اصلی نیز سنجش می‌شود.

$$\text{MAPE}=\beta_0+\beta_1\times\alpha_1+\beta_2\times\alpha_2+\beta_3\times\alpha_3+\beta_{11}\times\alpha_1^2+\beta_{22}\times\alpha_2^2+\beta_{33}\times\alpha_3^2+\beta_{12}\times\alpha_1\times\alpha_2+\beta_{13}\times\alpha_1\times\alpha_3+\beta_{23}\times\alpha_2\times\alpha_3 \qquad (۲۱)$$

در رابطه فوق، β_kها ضرایب مدل رگرسیونی یا رویه پاسخ است که بیانگر ضرایب تأثیر هر یک متغیرها یا اثر برهمکنش دوتایی آنها است.

در جدول ۳، بخشی از نتایج برازش مدل رگرسیونی (۲۱) شامل براورد ضرایب و آزمون معنی‌داری آنها نشان داده شده است. در این جدول تنها ضرایب معنی‌دار و تأثیرگذار در مدل رویه پاسخ نشان داده شده است. مقدار ضریب تعیین مدل رگرسیون ۹۹/۸۷ درصد براورد شده و نتایج تحلیل واریانس مدل (سطح معنی‌داری مدل برابر ۰/۰۰۰۰) نیز بیانگر برازش مناسب مدل بر داده‌های جمع‌آوری شده است. مقدار سطح معنی‌داری (P-value) تمام ضرایب ذکر شده در جدول ۳، کوچک‌تر از ۰/۰۵ است که

1. Box-Behnken
2. Full quadratic
3. Interactions

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

نتیجه آن تأثیر تمام متغیرهای α_j در رابطه (۲۱) بـر مقـدار MAPE اسـت. بـه عبـارتی دیگر می‌توان نتیجه گرفت مقدار هر سه متغیر α_1 ، α_2 و α_3 بـه دلیـل معنـادار بـودن باید در معادله رویه سطح قرار داشته باشند. همچنین جملات درجه دوم α_1^2، α_2^2 و α_3^2 و جملات برهمکنش هر دو متغیر (α_1 و α_2) و (α_2 و α_3) نیز بر مقدار خطای پیش‌بینی مؤثر است.

از دیگر نتایج جدول ۳، تأثیر منفی متغیرهای α_1 و تأثیر مثبت متغیر α_2 و α_3 بـر متغیر پاسخ است. جهت کمینه‌کردن متغیر پاسخ (درصد انحراف مطلق) نیـاز اسـت کـه متغیر α_1 افزایش یافته و کـاهش متغیرهـای α_2 و α_3 موجـب بهترشـدن تـابع هـدف می‌شود.

جدول ۳. نتایج مدل رگرسیونی رویه پاسخ

عبارت	ضریب	مقدار تأثیر	مقدار برآورد	انحراف معیار	T-Value	P-Value
ضریب ثابت	β_0		۴/۳۱۳۱	۰/۰۰۸۰۰	۵۳۹/۴۴	۰/۰۰۰
ضریب α_1	β_1	-۰/۳۳۷۷۶	-۰/۱۶۸۸۸	۰/۰۰۴۹۰	-۳۴/۴۹	۰/۰۰۰
ضریب α_2	β_2	۰/۳۹۸۷۶	۰/۱۹۹۳۸	۰/۰۰۴۹۰	۴۰/۷۲	۰/۰۰۰
ضریب α_3	β_3	۰/۳۷۲۴۰	۰/۱۸۶۲۰	۰/۰۰۴۹۰	۳۸/۰۳	۰/۰۰۰
ضریب α_1^2	β_{11}	۰/۱۷۷۹۸	۰/۰۸۸۹۹	۰/۰۰۷۲۱	۱۲/۳۵	۰/۰۰۰
ضریب α_2^2	β_{22}	۰/۱۴۷۳۰	۰/۰۷۳۶۵	۰/۰۰۷۲۱	۱۰/۲۲	۰/۰۰۰
ضریب α_3^2	β_{33}	۰/۱۲۱۳۱	۰/۰۶۰۶۶	۰/۰۰۷۲۱	۸/۴۲	۰/۰۰۰
برهمکنش α_1 و α_2	β_{12}	۰/۱۴۶۵۳	۰/۰۷۳۲۶	۰/۰۰۶۹۲	۱۰/۵۸	۰/۰۰۰
برهمکنش α_2 و α_3	β_{13}	۰/۰۸۹۸۶	۰/۰۴۴۹۳	۰/۰۰۶۹۲	۶/۴۹	۰/۰۰۱

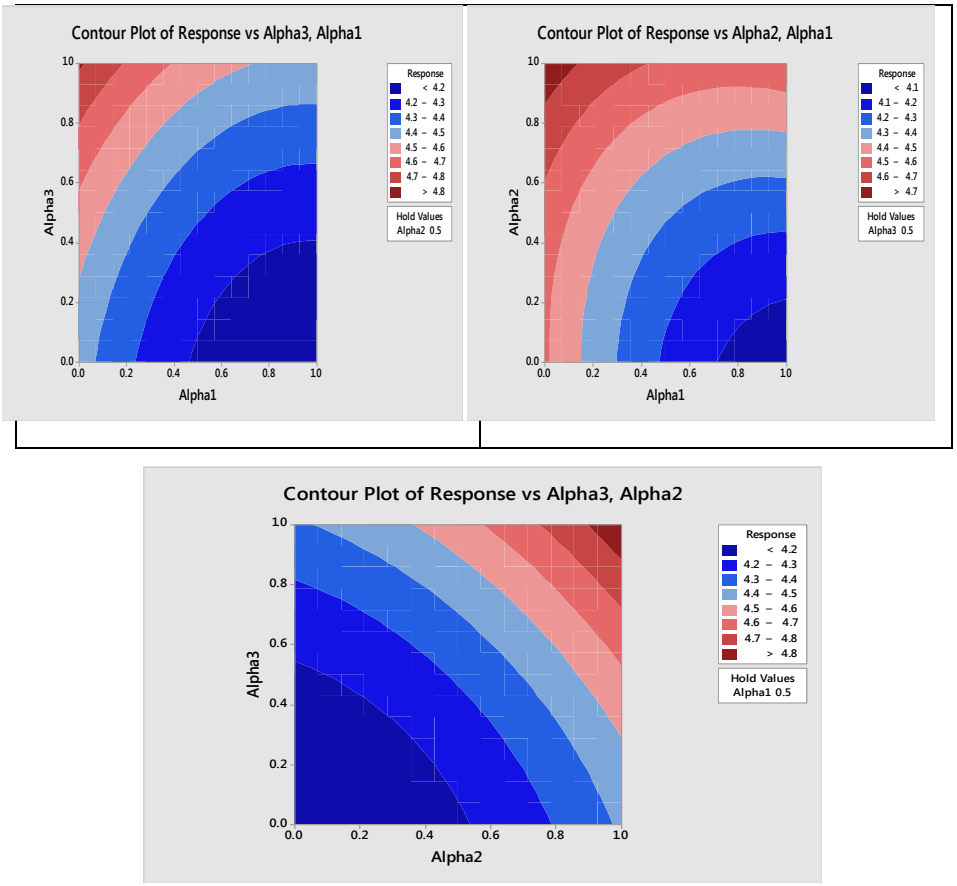
منبع: یافته‌های تحقیق

جهت درک بهتر تأثیر تغییرات متغیرها بر متغیر پاسخ، نمودارهای کانتور[1] تغییـرات متغیرها بر متغیر پاسخ در شکل ۲ رسم شده است. همان‌طورکه از در نمودارهای کانتور و جدول راهنمای سمت راست آنها مشخص است، هرچه از منطقه قرمز رنگ بـه سـمت منطقه آبی حرکت شود مقدار پاسخ یا تابع هدف کاهش خواهد یافت. بر ایـن اسـاس بـا افزایش متغیر α_1 و کاهش متغیر α_2 مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد و به همین ترتیب

1. Contour plot

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

با افزایش فاکتور α_1 و کاهش α_3 مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد و در نهایت بـا کـاهش α_2 و α_3 مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد.

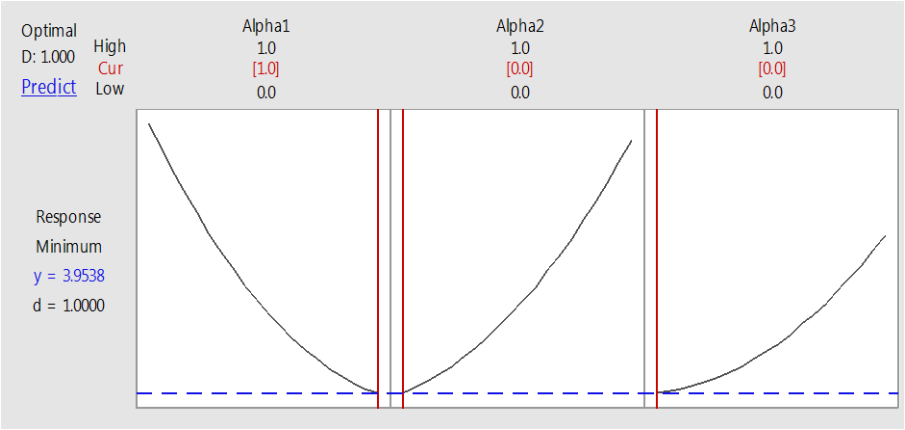


شکل ۲. خطوط کانتور تغییرات متغیرها بر متغیر پاسخ

منبع: یافته‌های تحقیق

هدف تعیین مقدار بهینه متغیرهـای α_j ترسـیم شـده اسـت. آنچـه در ایـن نمـودار مشخص است، کمترین مقدار MAPE برابر ۳/۹۵۳۸ تعیین شده است. این مقدار بهینـه تابع هدف به ازای α_1 برابر یک (حد بالای تغییرات مجاز آن)، α_2 برابر صفر (حد پـایین تغییرات مجاز آن) و α_3 برابر صفر (حد پایین تغییرات مجاز آن) حاصل می‌شود.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]



شکل ۳. نمودار تعیین مقدار بهینه متغیرها مبتنی بر داده‌های آموزش

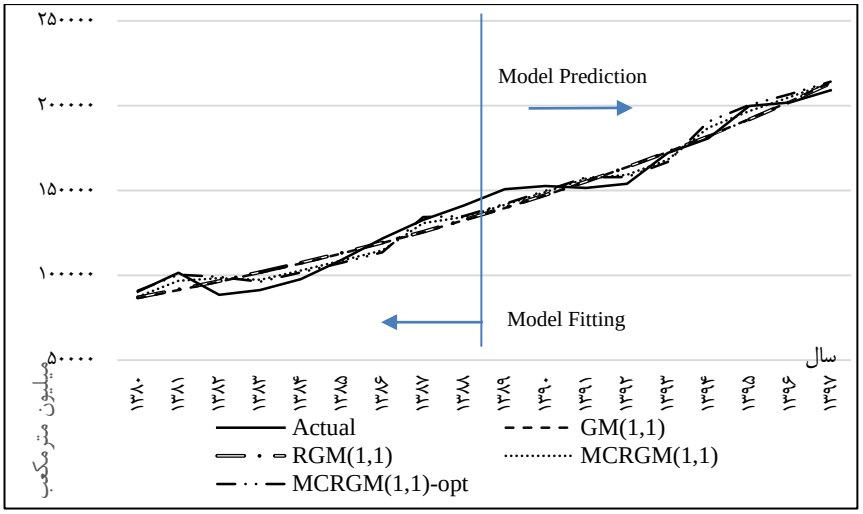
منبع: یافته‌های تحقیق

اکنون که مقدار بهینه ضرایب سفیدسازی در رابطه (۱۷) تعیین شده، مجدداً مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری با ضرایب بهینه شده (به جای ضرایب یکسان ۰/۵ در مدل سنتی این روش) اجرا و مقادیر پیش‌بییینی مجدد در ستون آخر جدول ۲ ارائه شده است.

۵- مقایسه عملکرد مدل‌های پیش‌بینی

با استفاده از روابط چهار مدل این مقاله شامل مدل خاکستری، رگرسیون خاکستری، رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهبودیافته (مدل پیشنهادی این مقاله)، مقدار مصرف گاز طی سه سال بعد از آخرین دوره داده‌های آموزش یعنی سال‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۷ به‌عنوان داده آزمون (چون مقادیر واقعی این سال‌ها مشخص و از داده‌های این دوره‌ها برای ساخت مدل‌ها استفاده نشده است) پیش‌بینی شده است. در شکل ۴ مقادیر واقعی و پیش‌بینی مصرف گاز در کل دوره‌های مورد مطالعه (به تفکیک داده‌های آموزش و داده‌های آزمون) با هر یک از مدل‌های مذکور نشان داده شده است.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]



شکل ۴. منحنی روند تغییر مقادیر واقعی و پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز

منبع: یافته‌های تحقیق

به‌منظور اندازه‌گیری و نمایش میزان خطای پیش‌بینی از شاخص میانگین درصد انحراف مطلق (MAPE) استفاده شده است. در جدول ۴، مقدار شاخص دقت پیش‌بینی مدل‌های مختلف به تفکیک داده‌های آموزش و آزمون ارائه شده است. همان‌طور که از نتایج این جدول مشخص است، خطای مدل رگرسیون خاکستری نسبت به مدل خاکستری کمتر و در نتیجه روش رگرسیون و مشخصاً تکنیک کمینه‌سازی مربعات خطای باقیمانده، موجب عملکرد بهتر مدل شد. همچنین بهره‌گیری از خواص مارکوفی مربوط به باقیمانده خطاها و محاسبات ماتریس احتمال انتقال، موجب تصحیح میزان خطاها شد که نشان‌دهنده عملکرد بهتر مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری نسبت به مدل رگرسیون خاکستری می‌باشد و در نهایت بهره‌گیری از رویکرد طراحی آزمایشات و تکنیک رویه پاسخ جهت تعیین دقیق مقدار بهینه ضرائب سفیدسازی مدل، موجب گردید که مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهبودیافته، نسبت به سایر مدل‌ها از خطای کمتر و از دقت بالاتری برخوردار شود.

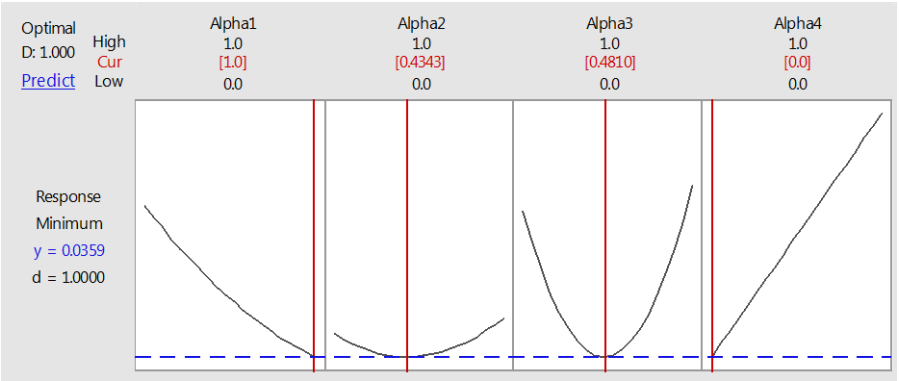
[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

جدول ۴. مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌های پیش‌بینی

مدل‌ها	میانگین درصد انحراف مطلق داده‌های آموزش	میانگین درصد انحراف مطلق داده‌های آزمون
خاکستری	۵/۴۵۵۱۳۶۰۵۱	۲/۱۵۵۸۷۸۹۷
رگرسیون خاکستری	۵/۴۳۷۷۱۷۵۶۴	۲/۰۸۴۰۲۴۸۳۵
رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری	۴/۳۱۳۳۰۷۶۶	۱/۷۷۳۵۹۱۶۱۸
رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهینه شده پیشنهادی	۳/۹۸۱۴۵۸۲۷۶	۱/۷۳۸۱۳۰۰۷۱

منبع: یافته‌های تحقیق

پس از اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، در جدول ۶ مقادیر پیش‌بینی مصرف سالیانه کشور بر اساس داده‌های مصرف ۱۸ سال و به کمک مدل خاکستری، مدل رگرسیون خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری پیشنهادی با α_j بهینه محاسبه شده است..از آنجا که تعداد داده‌های مصرف اولیه ۱۸ می‌باشد، تعداد اعداد خاکستری خطاها چهار (r=۴) خواهد بود و مجدداً از طرح باکس-بنکن استفاده شده تا مقدار بهینه α_jها محاسبه شود. در شکل ۵ تغییرات میانگین انحراف مطلق خطاها بر اساس تغییرات ضرایب سفیدسازی رسم شده است. با تحلیل این نمودار مقدار بهینه α_1 برابر ۱، α_2 برابر ۰/۴۳۴۳۴۳ ، α_3 برابر ۰/۴۸۰۹۷۹ و α_4 برابر صفر و مقدار بهینه خطا نیز برابر ۰/۰۳۵۹ خواهد شد.



شکل ۵. نمودار بهینه‌سازی مبتنی بر داده‌های ۱۸ سال

منبع: یافته‌های تحقیق

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

در نهایت از روش پیشنهادی این مقاله و با ضرایب بهینه تعیین شده، پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز سه سال آتی (۱۳۹۸ الی ۱۴۰۰) انجام شده است. نتایج برآوردهای این روش نیز در جدول ۶ ارائه شده است. درصد انحراف مطلق خطاها در مدل خاکستری، رگرسیون خاکستری، رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری و مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهبودداده شده برای داده‌های ۱۸ سال به ترتیب ۰/۰۵۱۱۹۰۸۰۱، ۰/۰۴۹۱۳۷۵۶۷، ۰/۰۳۷۵۴۵۸۸۶ و ۰/۰۳۵۸۱۶۲۰۹ می‌باشد.

جدول ۵. پیش‌بینی سه ساله مصرف گاز کشور بر اساس مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهینه و داده‌های ۱۸ سال (۱۳۹۷-۱۳۸۰)

t	$x^{(0)}(t)$ (میلیون مترمکعب)	مدل خاکستری	مدل رگرسیون خاکستری	رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری بهینه
۱۳۸۰	۹۰۳۲۰.۵	۸۵۷۴۶.۹۱۵	۸۷۲۸۱.۴۷۰۸	۹۰۲۷۸.۶۸
۱۳۸۱	۱۰۱۶۰۴.۲	۹۰۵۵۴.۳۰۹۱	۹۱۹۲۷.۱۱۴۹	۹۸۵۵۰.۱۰
۱۳۸۲	۸۸۵۱۶.۷۲	۹۵۶۳۱.۲۲۹۴	۹۶۸۳۳.۲۱۶۶	۹۹۲۷۷.۶۰
۱۳۸۳	۹۱۳۷۰.۱۲	۱۰۰۹۹۲.۷۸۷	۱۰۲۰۱۴.۳۷۸	۹۵۶۰۹.۴۴
۱۳۸۴	۹۷۷۱۱	۱۰۶۶۵۴.۹۳۹	۱۰۷۴۸۶.۰۲۲	۱۰۱۰۸۱.۰۸
۱۳۸۵	۱۰۹۱۰۶.۷	۱۱۲۶۳۴.۵۴	۱۱۳۲۶۴.۴۳۲	۱۰۶۸۵۹.۴۹
۱۳۸۶	۱۲۱۶۷۴.۸۲	۱۱۸۹۴۹.۳۸۷	۱۱۹۳۶۶.۸۰۹	۱۱۹۱۷۴.۶۱
۱۳۸۷	۱۳۲۶۵۰.۴	۱۲۵۶۱۸.۲۷۵	۱۲۵۸۱۱.۳۱۵	۱۳۲۴۳۴.۳۰
۱۳۸۸	۱۴۱۲۳۵.۰۱	۱۳۲۶۶۱.۰۵۴	۱۳۲۶۱۷.۱۳۲	۱۳۵۰۶۱.۵۱
۱۳۸۹	۱۵۰۸۲۱.۸	۱۴۰۰۹۸.۶۸۵	۱۳۹۸۰۴.۵۱۶	۱۴۲۲۴۸.۸۹
۱۳۹۰	۱۵۲۷۳۳.۱۵	۱۴۷۹۵۳.۳۰۷	۱۴۷۳۹۴.۸۶۱	۱۴۹۸۳۹.۲۴
۱۳۹۱	۱۵۱۶۱۸.۴۴	۱۵۶۲۴۸.۲۹۸	۱۵۵۴۱۰.۷۵۷	۱۶۲۰۳۳.۷۴
۱۳۹۲	۱۵۴۰۶۶.۶۱	۱۶۵۰۰۸.۳۴۶	۱۶۳۸۷۶.۰۶۴	۱۶۳۶۸۳.۸۶
۱۳۹۳	۱۷۲۰۶۳.۰۱	۱۷۴۲۵۹.۵۲۶	۱۷۲۸۱۵.۹۷۸	۱۶۶۴۱۱.۰۴
۱۳۹۴	۱۸۰۷۷۰	۱۸۴۰۲۹.۳۷۳	۱۸۲۲۵۷.۱۰۸	۱۸۲۰۶۴.۹۰
۱۳۹۵	۱۹۹۹۰۰	۱۹۴۳۴۶.۹۶۵	۱۹۲۲۲۷.۵۵۳	۱۹۲۰۳۵.۳۵
۱۳۹۶	۲۰۱۸۴۸	۲۰۵۲۴۳.۰۱۳	۲۰۲۷۵۶.۹۹۱	۲۰۵۲۰۱.۳۷
۱۳۹۷	۲۰۹۰۱۲	۲۱۶۷۵۰	۲۱۳۸۷۶.۷۶۱	۲۱۳۶۸۴.۵۶
۱۳۹۸		۲۲۵۶۱۹.۹۶	۲۲۸۹۰۲.۰۱۵	۲۲۵۴۲۷.۷۶
۱۳۹۹		۲۳۸۰۲۱.۵۴۱	۲۴۱۷۳۵.۳۸۹	۲۳۸۴۷۷.۱۴
۱۴۰۰		۲۵۱۱۱۸.۴۱۵	۲۵۵۲۸۸.۲۶۴	۲۵۱۱۵۰.۶۳

منبع: یافته‌های تحقیق

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این تحقیق روشی مبتنی بر رویکرد طراحی آزمایشات جهت بهبود مدل پیش‌بینی رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری پیشنهاد شد. به این منظور در ابتدا با ترکیب مدل خاکستری با تکنیک رگرسیون، فاصله داده‌های واقعی را با مقادیر پیش‌بینی خاکستری کمینه کرده و جهت غلبه بر تأثیر خواص تصادفی و نوسانی داده‌ها، از مدل باقیمانده خطای اصلاح شده زنجیره مارکوف استفاده شد و با ترکیب آن با مدل رگرسیون خاکستری، مدل رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری پیاده سازی گردید. در ادامه، مقادیر بهینه ضرائب سفیدسازی مدل فوق با رویکرد طراحی آزمایشات و براساس روش باکس بنکن، با هدف کاهش معیار پاسخ "میزان درصد متوسط خطا" حاصل شد.

در تحقیق حاضر جهت اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، داده‌های مصرف سالیانه گاز ایران مربوط به ۱۵ سال (۱۳۸۰ الی ۱۳۹۴) را به‌عنوان داده‌های مدل فرض کرده و پیش‌بینی ۳ سال (۱۳۹۵-۱۳۹۷) را براساس سه مدل خاکستری، رگرسیون خاکستری و رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری انجام و نتایج حاصله با داده‌های واقعی مربوط به این سه سال مقایسه شد.

مطالعه کاربردی ما در زمینه پیش‌بینی مصرف سالیانه گاز کشور به خوبی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی رگرسیون زنجیره مارکوف خاکستری (OP-MCRGM) دقت بالاتری نسبت به مدل‌های خاکستری GM، مدل RGM و مدل سنتی MCRGM دارد.

در این تحقیق از داده‌های مصرف سالیانه گاز که مجموع سه عدد، مصرف (خانگی، تجاری و صنایع غیرعمده)، مصرف صنایع عمده و مصرف نیروگاه‌ها می‌باشد، به‌عنوان داده‌های کاربردی استفاده شده است، لذا می‌توان مدل بهینه پیشنهادی این تحقیق را به‌صورت مجزا به ترتیب برای داده‌های سه بخش مصرف (خانگی، تجاری و صنایع غیرعمده)، مصرف صنایع عمده و مصرف نیروگاه‌ها انجام داده و با نتایج پیش‌بینی حاصل از مجموع مصرف مقایسه کرد. ثانیاً با توجه به منطق کلی بهینه‌سازی استفاده شده در این مقاله و نیاز به حداقل داده‌ها (۴ داده) جهت مدل‌سازی به این روش،

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

می‌توان حوزه کاربردی مورد استفاده در مقاله را به سایر حوزه‌های انرژی منجمله نفت و آب و برق نیز تعمیم داد.

پیشنهاد تحقیق آتی، مربوط به انتخاب رویکردهای بهینه‌سازی کلاسیک برنامه‌ریزی خطی (غیرخطی) جهت بهینه‌سازی ضرائب سفیدسازی می‌باشد. علیرغم اینکه تعیین تابع هدف بهینه‌سازی در این روش مستلزم محاسبات دستی طولانی می‌باشد، ولیکن می‌تواند با استفاده از تحلیل نتایج مربوطه، گام تأثیرگذاری در کمک به تصمیم‌گیرندگان حوزه انرژی کشور برداشت.

منابع

اعظمی، سمیه، الماسی، مجتبی، علی نیایی، زهرا (۱۳۹۷)، ارتباط میان مصرف گازطبیعی و رشد اقتصادی در کشورهای صادرکننده گازطبیعی با در نظر گرفتن شکست‌های ساختاری: کاربردی از آزمون علیت دومیترشو- هرلین، فصلنامه مطالعات اقتصاد انرژی، شماره ۵۷، صفحات ۳۹-۶۴.

فطرس، محمدحسن، مصطفی، امیدعلی، گلوانی، امیرمحمد (۱۳۹۶)، پیش‌بینی تراز داخلی گازطبیعی: با استفاده از مدل ترکیبی ARDL و میانگین کتحرک خودهمبسته یکپارچه (ARIMA)، پژوهشنامه اقتصاد انرژی ایران، شماره ۲۵، صفحات ۹۵-۱۲۴.

ناجی‌میدانی، علی اکبر، رحیمی، غلامعلی، پاییز (۱۳۹۴)، تعیین اولویت بازارهای صادراتی گازطبیعی ایران، فصلنامه مطالعات اقتصاد انرژی، شماره ۴۶، صفحات ۱۸۱-۲۱۹.

Cheng, C. S., Hsu, Y. T., & Wu, C. C. (1997). Grey modeling using neural network. *The Journal of Grey System*, 3, 219e232.

Deng JL. Control problem of grey systems. *Syst Control Lett* 1982;1(5):288–94.

Dario Sebalj, Josip Mesarie, Davor Dujak. (2017), Predicting Natural Gas Consumption – A Litrature Review. *28th CECIIS,* 27-29, Varazdin, Crotia

Gang Xu., & Weiguo Wang. (2010). Forecasting China's natural gas consumption based on a combination model. Journal of Natural Gas Chemistry, 19(2010)493–496.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

Hsu, L.C. (2003). Applying the grey prediction model to the global integrated circuit industry. *Technological Forecasting and Social Change*, 70(6), 563-574.

Hsu, Y. T., Liu, M. C., Yeh, J., & Hung, H. F. (2009). Forecasting the turning time of stock market based on Markov Fourier grey model. *Expert Systems with Applications*, 36(4), 8597e8603.

Kazemi, A. Modarres, M. Mehregan, M. (2012), Energy Demand Forecast of Iran's Industrial sector Using Markov Chain Grey Model. *Part A: Intl. J. Humanities*, (2013) Vol. 20(1): (1-12).

Kumar, U., & Jain, V. K. (2010). Time series models (Grey Markov, Grey Model with rolling mechanism and singular spectrum analysis) to forecast energy consumption in India. *Energy*, 35(4), 1709e1716.

Li, G. D., Masuda, S., & Nagai, M. (2013). The prediction model for electrical power system using an improved hybrid optimization model. *Electrical Power and Energy Systems*, 44, 981e987

MAO Zhan-li,. SUN Jin-hua (2011). Application of Grey-Markov Model in Forecasting Fire Accidents. *Procedia Engineering* 11(2011) 314–318

Mostafaei., H., Kordnoori, SH. (2012). Hybrid Grey Forecasting Model for Iran's Energy Consumption and Supply. *International Journal of Energy Economics and Policy* Vol. 2, No. 3, 2012, pp. 97-102.

Sun Wei., Xu Yanfeng,. (2017). Research on China's energy supply and demand using an improved Grey-Markov chain model based on wavelet transform. *Energy* 118 (2017) 969-984.

Xie, N.-ming, Yuan, C.-qing, & Yang, Y.-jie (2015). Forecasting China's energy demand and self-sufficiency rate by grey forecasting model and Markov model. *Electrical Power and Energy Systems,* 66(2015), 1e8.

Xu Sun., Wangshu S., Jianzhou Wang., Yixin GAO (2015). Using a Grey Markov model optimized by Cuckoo search algorithm to forecast the annual foreign tourist arrivals to China. *Tourism Management* 52 (2016) 369e379.

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]

Development of a Markov Chain Grey Regression Model to Forecast Annual Natural Gas Consumption in Iran

Shahran Shafiei
Master of Industrial Engineering, Islamic Azad University-North Branch, Tehran, Iran Shahran/shafiei@gmail/com

Vahid Baradaran[1]
PhD. Industrial Engineering Department, Faculty of Engineering Islamic Azad University-North Branch, Tehran, Iran, v_baradaran@iau-tnb/ac/ir
Received: 2018/02/06 Accepted: 2019/12/17

Abstract

Accurate forecasting of annual gas consumption of the country plays an important role in energy supply strategies and policy making in this area. Markov chain grey regression model is considered to be a superior model for analyzing and forecasting annual gas consumption. This model Markov is a combination of the Markov chain and grey regression models. According to this model, the residual errors generated from the grey regression model are divided into a number of equal portions. We will add the calculated error terms to the values obtained through the grey regression in order to increase its accuracy. We use the box-bench design to calculate the optimal value of the error term which produces the most accurate forecasts when using the Markov chain grey regression model. The experimental study of the forecasting of natural gas consumption indicates that the proposed Markov chain grey regression model is more accurate than they grey or conventional Markov chain regression models.

JEL Classification: C15, C53, C90, L95

Keywoeds: Grey Model, Regression Technique, Markov Chain, Design of Experiments

1. Corresponding Author

[Downloaded from iiesj.ir on 2026-02-03]